Corrigée de la série 01 logique mathématique 2023/2024

Exo1

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que D et D' sont parallèles :

— Supposer D et D' non parallèles.

— Aboutir à une contradiction, en remarquant que D et D' sont sécantes, donc ont un point commun dont les coordonnées (x_0, y_0) vérifient les égalités $y_0 = x_0 + 1 = x_0 - 1$; ce qui entraîne l'égalité "$1 = -1$" en contradiction, dans la théorie des nombres réels dont dépend la géométrie plane analytique, avec l'assertion vraie "$-1 \neq 1$" (l'assertion auxiliaire du cours est l'assertion "$-1 \neq 1$").

Conclure à la non-validité de l'hypothèse (D et D' non parallèles), donc conclure que D et D' sont parallèles.

Exo2

Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1)$:

— Prendre $n \in \mathbb{N}$.

— Montrer, par disjonction des cas, $(\exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1)$:

$\boxed{\text{cas 1}}$

- Supposer "n pair" (assertion auxiliaire naturelle) (ainsi $n = 2p$).
- Poser (analyse simple) $k = p^2$ (remarquer que $k \in \mathbb{N}$).
- Vérifier que $(n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1)$, en remarquant qu'on a $n^2 = 4k$.

$\boxed{\text{cas 2}}$

- Supposer n impair (non "n pair") (ainsi $n = 2p + 1$).
- Poser (analyse simple) $k = p^2 + p$ (remarquer que $k \in \mathbb{N}$).
- Vérifier que $(n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1)$, en remarquant qu'on a $n^2 = 4k + 1$.

— Conclure que $(\exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1)$.

Conclure que $(\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1)$.

Exo3

Noter $P(n)$ l' "assertion" (7 divise $3^{2n} - 2^n$).

Montrer par récurrence l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(n))$.

— Montrer que $P(1)$ est vraie *(initialisation)* , en remarquant que 7 divise bien $3^2 - 2$.

— Prendre $k \in \mathbb{N}^*$ et supposer que $P(k)$ est vraie (ainsi $3^{2k} - 2^k = 7 \times N$ pour un certain N) *(hypothèse de récurrence)* .

— Montrer que $P(k + 1)$ est vraie *(transmissibilité)* , en remarquant que :

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 2^{(k+1)} &= 3^2\,(3^{2k} - 2^k) + 3^2 \times 2^k - 2^{k+1} \\ &= 3^2\,(3^{2k} - 2^k) + 7 \times 2^k \\ &= 7 \times (3^2 \times N + 2^k)\,. \end{aligned}$$

Conclure, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

Exo4

Montrer $((\forall\, \varepsilon > 0,\ |\,a\,| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0)$ en raisonnant par contraposition;
pour cela, vérifier l'assertion $(a \neq 0 \Rightarrow (\exists\, \varepsilon > 0,\ |\,a\,| \geq \varepsilon))$:

— Supposer $a \neq 0$.

— Prouver $(\exists\, \varepsilon > 0,\ |\,a\,| \geq \varepsilon)$:

- Poser (analyse simple) $\varepsilon = \dfrac{|\,a\,|}{2}$ (vérifier que $\varepsilon > 0$).
- Vérifier (évident) que $|\,a\,| \geq \varepsilon$.

— Conclure que $(\exists\, \varepsilon > 0,\ |\,a\,| \geq \varepsilon)$.

Conclure que $(a \neq 0 \Rightarrow (\exists\, \varepsilon > 0,\ |\,a\,| \geq \varepsilon))$, donc que :
$((\forall\, \varepsilon > 0,\ |\,a\,| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0)$.