Faculté des Mathématiques et de l'Infrmatique
Department of Mathematics.

polycopié de

Logique mathématique

Auteur | **Dr.kheir.saadaoui- University de Msila-**

mail | **kheir.saadaoui@univ-msila.dz**

2022/2023

Contents

Chapter 1

Notions élémentaires

1.1 Objectifs de l'enseignement

Acquérir les fondements du raisonnement mathématique, Acquérir les fondements de la théorie des ensembles et acquérir les éléments de la rédaction des preuves mathématiques.

1.2 Éléments du langage mathématiques

Axiome. Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer.

Ainsi, par exemple, Euclide a énoncé cinq axiomes (« les cinq postulats d'Euclide »), qu'il a renoncé à démontrer et qui devaient être la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : "par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».

Un autre exemple d'axiomes est fourni par les (cinq) axiomes de Peano. Ceux-ci définissent l'ensemble des entiers naturels. Le cinquième axiome affirme que : « si P est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de P est dans P (le successeur de n est $n+1$), alors $P = n$ ». Cet axiome est appelé «l'axiome d'induction »ou encore l'axiome de récurrence .

Ces énoncés ont en commun d'être «évidents » pour tout le monde.

Proposition1.1 (ou assertion ou affirmation). Une proposition est un énoncé pouvant être

vrai ou faux. Par exemple, « tout nombre premier est impair » et « tout carré de réel est un réel positif » sont deux propositions. Il est facile de démontrer que la première est fausse et la deuxième est vraie. Le mot proposition est clair : on propose quelque chose, mais cela reste à démontrer.

Théorème1.2. Un théorème est une proposition vraie (et en tout cas démontrée comme telle). Par abus de langage, le mot proposition désigne souvent, dans la pratique des cours de mathématiques, un théorème intermédiaire ou de moindre importance, et même on a tendance à appeler proposition la plupart des théorèmes pour réserver le mot théorème aux plus grand d'entre eux (théorème de Pythagore, ...). C'est d'ailleurs ce dernier point de vue que nous adopterons dans les chapitres ultérieurs (mais pas dans ce premier chapitre où le mot «proposition » aurait alors deux significations différentes).

Corolaire. Un corolaire à un théorème est un théorème qui est conséquence de ce théorème. Par exemple, dans le chapitre «continuité ", le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue à valeurs réelles, est un intervalle de $\mathbb{R}$. Un corollaire de ce théorème affirme alors que si une fonction définie et continue sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, prend au moins une valeur positive et au moins une valeur négative alors cette fonction s'annule au moins une fois dans cet intervalle.

Lemme1.3. Un lemme est un théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.

Conjecture. Une conjecture est une proposition que l'on suppose vraie sans parvenir à la démontrer. Les conjectures sont le moteur du progrès des mathématiques. Tel ou tel mathématicien a eu l'impression que tel ou tel résultat important était vrai et l'a énoncé sans pouvoir le démontrer, laissant à l'ensemble de la communauté mathématique le soin de le confirmer par une démonstration convaincante ou de l'infirmer. Les conjectures suivantes sont célèbres :

- (conjecture de Fermat) Si n est un entier supérieur ou égal à 3, il n'existe pas d'entiers naturels tous non nuls x, y et z tels que $x^n + y^n = z^n$ (cette conjecture date du XVII

siècle et il a été démontré récemment que ce résultat était vrai).

Définition1.4. Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet.

On doit avoir conscience que le mot « axiome » est quelquefois synonyme de « définition ». Par exemple, quand vous lirez « définition d'un espace vectoriel », vous pourrez tout autant lire « axiomes de la structure d'espace vectoriel » et vice-versa.

1.3 Rédaction de preuves mathématiques

1.3.1 raisonnement déductif

Le schéma du raisonnement déductif est le suivant :

Quand P est une proposition vraie, et $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, on peut affirmer que Q est une proposition vraie.

Un résultat connu comme étant vrai (c'est à dire un théorème) ne peut entraîner qu'un autre résultat vrai. Cette règle est connue sous le nom de "modus ponens". C'est le raisonnement de base que vous reproduirez un grand nombre de fois. Et même, vous tiendrez ce raisonnement tellement de fois (ou encore, vous serez tellement souvent dans la situation où l'hypothèse P est vraie) que vous risquez à terme de commettre une confusion entre la phrase simple « $P \Rightarrow Q$ est vraie » et la phrase plus complète « P est vraie et $P \Rightarrow Q$ est vraie». Seule la deuxième permet d'affirmer que Q est vraie.

Sachant de plus que l'implication est transitive, une démonstration prend très souvent la forme suivante : P est vraie et $P \Rightarrow Q \Rightarrow R \Rightarrow \ldots \Rightarrow S \Rightarrow T$ est vraie, et on a donc montré que T est vraie.

1.3.2 raisonnement par l'absurde

On veut montrer qu'une proposition P est vraie. On suppose que c'est sa négation $\bar{P}$ qui est vraie et on montre que cela entraîne une proposition fausse. On en conclut que P est vraie

(puisque Q est fausse, l'implication $\bar{P} \Rightarrow Q$ ne peut être vraie que si $\bar{P}$ est fausse ou encore si P est vraie). Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Quand $\bar{P} \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, et Q est une proposition fausse, on peut affirmer que

P est une proposition vraie.

Exemple. Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers naturels non nuls a et b tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ou encore $a^2 = 2b^2$. Maintenant, dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier a^2 (qui est à l'évidence supérieur à 2), le nombre premier 2 apparaît à un exposant pair (si $a = 2^\alpha \times \ldots$ alors, $a^2 = 2^{2\alpha}$) alors qu'il apparaît à un exposant impair dans $2b^2$(si $b = 2^\beta \times \ldots$ alors, $2b^{2\beta+1} \times \ldots$). Si l'on admet l'unicitéde la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur à 2 (unicité qui sera démontrée plus tard dans ce cours), l'égalité des nombres a^2 et $2b^2$ est donc impossible. Par suite, l'hypothèse faite ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$) est absurde et on a montré (par l'absurde) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.3.3 raisonnement par contra-position

Le schéma est le suivant :

Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est une proposition vraie, il (faut et) il suffit de montrer que

$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est une proposition vraie.

Exemple. Soient k et k' deux entiers naturels non nuls. Montrons que $(kk' = 1 \Rightarrow k = k' = 1)$. Supposons que $k \neq 1$ ou $k' \neq 1$. Alors, on a $(k \geq 2$ et $k' \geq 1)$ ou $(k \geq 1$ etk $k' \geq 2)$. Dans les deux cas, on a $kk' \geq 2$ et en particulier, $kk' \neq 1$. Donc,

$$(k \neq 1 \text{ ou } k' \neq 1) \Rightarrow (kk' \neq 1)$$

- Par contra-position, on a montré que

$$(kk' = 1) \Rightarrow (k = 1 \text{ et } k' = 1)$$

1.4 Théories mathématiques

A la base d'une théorie mathématique il y'a les axiomes et les définitions :

Définition1.5 (Axiome) Un axiome est un énoncé mathématique que l'on admet sans démonstration.

Exemple.

- Axiome d'Euclide sur les droites parallèles.
- Axiome de Pasch sur l'intersection d'un triangle et une droite.
- Axiome de Hilbert de la géométrie euclidienne.
- axiome d'Archimède sur les nombres réels.
- Axiome de Peano sur les entiers naturels.
- Axiome de Zermelo-Fränkel sur la théorie des ensembles.
- Axiome de Zorn (dit axiome de choix).

Définition1.6 On pose une définition de façon arbitraire pour désigner un objet mathématique.

Exemple.

- Les définitions d'un nombre.
- Les définitions d'une application.
- Les définitions d'une dérivée.

Dans une théorie mathématique on trouve des propositions (assertions), des prédicats, des théorèmes, des lemmes et des conjectures :

Définition1.7 (Assertion) Une assertion est un énoncé mathématique on peut attribuer la valeur de vérité : vrai (1) ou faux (0) mais jamais les deux à la fois.

Exemple.

- L'énoncé "Alger est la capitale de l'Algérie" est vrai.
- L'énoncé "24 est un multiple de 2" est vrai.
- L'énoncé "19 est un multiple de 2" est faux.

Définition1.8 (Prédicat) Un prédicat est une assertion contenant des variables.

Exemple.

- L'énoncé suivant : $P(n)$: " n est un multiple de 2 " est un prédicat car il devient une assertion quand on donne une valeur à n;
- $p(10)$: "10 est un multiple de 2 " est une assertion vraie,
- $p(11)$: "11 est un multiple de 2 " est une assertion fausse.
- $q(x, A)$: "$x \in A$ " est un prédicat à deux variables; $q(1, \mathbb{N})$ est vraie, $q(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ est fausse.

Lemme1.9 Un lemme est un résultat d'importance malaxeur.

Théorème1.10 Un théorème est un résultat d'une importance majeure.

Conjecture1.11 Une conjecture est une proposition q l'on a vérifiée dans plusieurs cas, mais que l'on a pas encore réussi démontrer.

Exemple.

- La conjecture de Fermat sur l'équation diophantienne suivante d'inconnues x, y et z : $n \in \mathbb{N}, x^n+y^n = z^n$. Il affirme qu' n'existe aucune solution non triviale si le paramètre $n > 2$ Mais il fallut attendre 1996, et le mathématicien anglais Andrem-Wiles, pour trouver une réponse définitive.
- La conjecture de Riemann sur les zéros non triviaux de la fonction ζ: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^*}$ (conjecture non résolue).
- La conjecture de Bertrand sur les nombres premiers dans les intervalles $[n, 2n]$.

1.5 Connecteurs logiques

Soient P et Q deux propositions :

Énoncé. non P

Notation. $\neg P$

L'assertion $\neg P$ est vraie signifie que P est fausse.

Énoncé. P et Q

Notation. $P \wedge Q$

L'assertion $P \wedge Q$ est vraie si P et Q des sont; $P \wedge Q$ est fausse .

Énoncé. P ou Q

Notation. $P \vee Q$

L'assertion $P \vee Q$ est vraie si l'une (au moins) des deux assertions $\boldsymbol{P}$ su Q est vraie, $P \vee Q$ est fausse si P et Q sont fausses.

Énoncé. $\left\{ \begin{array}{c} \text{si } P\text{, alors } Q \\ P \text{ implique } Q \\ P \text{ est une condition suffisante de } Q \\ Q \text{ est une condition nécessaire de } P \end{array} \right\}$

Notation. $p \Longrightarrow q, p \longrightarrow q$

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie signifie qu'il est exclu que P soit sans que Q ne le soit.

Énoncé. $\left\{ \begin{array}{c} P \text{ équivant à } Q \\ P \text{ si et seulement si } Q \end{array} \right\}$

Notation. $P \Longleftrightarrow Q, P \longleftrightarrow Q, P \equiv Q$

L'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ est vraie signifie que :

$$(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow P) \text{ sont vraies.}$$

on résume cela dans les tables de vérité ci-dessous

$-P$	P
0	1
1	0

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0

Propriétés1.12

- $P \wedge (Q \vee Q) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$; double distributivité de "et" et "ou".
- $P \vee (Q \wedge Q) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee Q)$.
- $(P \Longrightarrow Q) \equiv (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$; contraposée.
- $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$; loi de De Morgan.
- $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$.
- $P \Longrightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
- $\neg(P \Longrightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

1.6 Quantificateurs logiques

Énoncé. Quel que soit ou pour tout.

Notation. $\forall \quad (\forall x p(x))$

Énoncé. II existe au moins ou il existe.

Notation. $\exists \quad (\exists x p(x))$

Exemple.

- La proposition $\forall x \in [-3,1], x^2+2x-3 \leq 0$ est vraie.
- La proposition $\forall n \in \mathbb{N}, (n^2 \text{ pair }) \Longrightarrow (n \text{ pair })$ est vraie.
- La proposition $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ est vraie.
- La proposition $\exists! x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x = 1''$ est vraie.

Remarque.

- La proposition $\exists x \in E, P(x)$ signifie que

$$\exists x((x \in E) \wedge P(x))$$

et se lit comme suit : "si $x \in E$, alors $P(x)$ est vraie".

- La proposition $\forall x \in E, P(x)$ signifie que

$$\forall x(x \in E \Longrightarrow P(x))$$

et se lit comme suit : "Si pour tout (ou quel que soit) x appertenant à $E, P(x)$ est vraie".

- S'il existe un et un seul x dans E, tel que $P(x)$ soit vraie; on pourra écrire $\exists! x \in E, P(x)$.
- Si $\forall x \in E, P(x)$ est vraie alors $\exists x \in E, P(x)$ est vraie.

Remarque. (Attention) $\exists!$ ne désigne pas un quantificateur. En effet :

$$(\exists! x \in E, P(x)) \equiv (R_1 \wedge R_2) \text{ òu } R_1 \equiv (\exists x \in E, P(x))$$

et

$$R_2 \equiv (\forall x \in E, \forall x' \in E, [(P(x) \wedge P(x')) \Longrightarrow x = x'])$$

1.6.1 Règles de négation

Soit $P(x)$ un prédicat sur E. De manière évidente on a :

- $\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$.
- $\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$.

Exemple.

- La négation de $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, 1+nx \leq (1+x)^n$ est $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in \mathbb{R}_+, 1+nx > (1+x)^n$.
- La négation de $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y=5$ est $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$, $x+y \neq 5$.

Remarque. (Attention) On vérifie aussi que l'on a :

$$\neg(\exists! x \in E, p(x)) \equiv (\neg R_1 \vee \neg R_2)$$

avec $R_1 =$ existence et $R_2 =$ unicité.

- On peut permuter deux quantificateurs identiques.
- Ne pas permuter deux quantificateurs différents.

1.7 Méthodes de démonstration

Réaliser une démonstration (preuve ou raisonnement) en mathématiques, c'est un processus essentiel qui permet de passer des propositions supposées vraies en tant qu'hypothèses à une proposition appelée conclusion, en respectant les règles de la logique.

1.7.1 Démonstration Directe

Une démonstration directe est le type de preuve le plus simple et le plus courant. Dans une démonstration directe, vous partez des hypothèses données et appliquez un raisonnement logique pour parvenir à la conclusion souhaitée.

Exemple. Montrer que si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $a+b \in \mathbb{Q}$.

Solution. Prenons $a, b \in \mathbb{Q}$. Alors, $a = \frac{p}{q}$ pour un certain $p \in \mathbb{Z}$ et un certain $q \in \mathbb{N}$. De même $b = \frac{k}{l}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ et un certain $l \in \mathbb{N}$. Maintenant : $a+b = \frac{pl+kq}{ql}$. Or le numérateur $pl+kq$ est bien un élément de $\mathbb{Z}$; le dénominateur ql est lui un élément de $\mathbb{N}$. Donc $a+b$ s'écrit bien sous la forme $\frac{m}{n}$ avec $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Ainsi $a+b \in \mathbb{Q}$.

1.7.2 Le Raisonnement par Hypothèse Auxiliaire : Une Approche Avancée

Le raisonnement par hypothèse auxiliaire est une technique avancée de démonstration en mathématiques qui permet de prouver des énoncés complexes en introduisant temporairement une hypothèse supplémentaire. Cette méthode est particulièrement utile lorsque la preuve directe de l'énoncé principal est difficile, mais devient plus simple sous certaines conditions auxiliaires.

Le processus de raisonnement par hypothèse auxiliaire peut être décrit en détail :

1. Énoncé Principal : Tout d'abord, vous avez un énoncé principal que vous souhaitez démontrer. Cet énoncé peut être exigeant, complexe ou difficile à prouver directement.

2. Hypothèse Auxiliaire : Pour faciliter la preuve de l'énoncé principal, vous faites une supposition temporaire, l'hypothèse auxiliaire. Cette hypothèse est introduite pour simplifier la démonstration de l'énoncé principal.

3. Démonstration Sous Hypothèse Auxiliaire : Vous procédez ensuite à la démonstration de l'énoncé principal en utilisant l'hypothèse auxiliaire. Cette démonstration est souvent plus aisée que la preuve directe de l'énoncé principal. Vous pouvez utiliser des méthodes mathématiques, des équations, des théorèmes, etc., sous l'hypothèse auxiliaire.

4. Validation de l'Hypothèse Auxiliaire : Une fois que vous avez démontré l'énoncé principal sous l'hypothèse auxiliaire, vous prouvez que l'hypothèse auxiliaire est vraie. Cela peut nécessiter une démonstration distincte, des calculs supplémentaires, ou même une preuve par contradiction.

5. Retour à l'Énoncé Principal : Après avoir confirmé que l'hypothèse auxiliaire est vraie, vous revenez à l'énoncé principal que vous souhaitiez prouver. Vous pouvez maintenant conclure que l'énoncé principal est vrai, car il découle de l'hypothèse auxiliaire, qui a été établie comme vraie.

Exemple. Considérons $A = \{2, -3\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 6 = 0\}$, mon- ons que $A = B$.

Solution. On a $(A \subset B \wedge B \subset A) \Longrightarrow A = B$, donc pour montrer que $A = B$, il suffit de montrer que ($A \subset B$ et $B \subset A$).

1.7.3 Démonstration par disjonction des cas

Démonstration par disjonction des cas est une méthode de preuve mathématique qui consiste à diviser un problème complexe en plusieurs cas plus simples et à démontrer que l'énoncé est vrai dans chacun de ces cas. Cette méthode repose sur le principe que si vous pouvez montrer que l'énoncé est vrai dans tous les cas possibles, alors il est vrai en général.

Le processus de démonstration par disjonction des cas peut être résumé comme suit :

1. Identification des Cas : Tout d'abord, identifiez les différents cas possibles qui peuvent se produire en fonction des conditions ou des variables en jeu. Ces cas doivent couvrir toutes les possibilités.

2. Démonstration de Chaque Cas : Ensuite, démontrez que l'énoncé est vrai pour chaque cas individuellement. Vous devez appliquer des arguments et des preuves spécifiques à chaque cas.

3. Exhaustivité : Assurez-vous que les cas que vous avez considérés sont exhaustifs, c'est-à-dire qu'ils couvrent toutes les situations possibles. Il ne doit pas y avoir de cas non traité.

4. Conclusions Séparées : Pour chaque cas, concluez que l'énoncé est vrai dans ce cas particulier. Vous pouvez utiliser des arguments, des démonstrations, des équations, etc., pour montrer que l'énoncé est satisfait.

5. Conclusions Générales : Enfin, après avoir montré que l'énoncé est vrai dans tous les cas individuels, concluez que l'énoncé est vrai dans tous les cas possibles, c'est-à-dire en général.

Exemple. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ pair.

Solution. On pose $P =$ "n est pair", on a :

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1),$$

donc si, n est pair alors, $n^3 - n$ est pair et si, n est impair on a aussi, $n^3 - n$ est pair.

1.7.4 Démonstration par l'absurde

Démonstration par l'absurde** est une méthode de preuve en mathématiques et en logique qui repose sur la supposition contraire pour établir la vérité d'une proposition. Voici un résumé de cette méthode :

1. Hypothèse Contradictoire : Pour utiliser la démonstration par l'absurde, on suppose d'abord que la proposition que l'on souhaite prouver est fausse (c'est-à-dire qu'on suppose la négation de la proposition).

2. Dérivation de Conséquences : En partant de cette hypothèse contradictoire, on dérive des conséquences logiques et mathématiques.

3. Conduisant à une Contradiction : On poursuit la dérivation jusqu'à ce qu'on arrive à une contradiction logique ou mathématique. Cela signifie qu'il y a une incohérence ou une impossibilité dans les conséquences déduites.

4. Conclusion : Lorsqu'une contradiction est atteinte, on conclut que l'hypothèse initiale (la négation de la proposition que l'on souhaite prouver) est fausse.

5. Affirmation de la Proposition : Par conséquent, on affirme que la proposition que l'on voulait prouver est vraie, car si sa négation était vraie, cela conduirait à une contradiction.

Exemple. "Montrons que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ".

Solution. On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel et on arrive à une conclusion fausse. Cela voudra donc dire que notre hypothèse de départ est fausse et donc que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Supposons maintenant, (par l'absurde) que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe deux entiers relatifs p et q tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ et la fraction $\frac{p}{q}$ est irréductible. On a $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, donc $2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, aussi p est pair, donc il existe un nombre relatif k tel que $p = 2k$, donc $p^2 = 4k^2$ or $p^2 = 2q^2$, done $2q^2 = 4k^2$, donc $q^2 = 2k^2$, donc q est $\underline{p} = 2k$, di

existe un nombre relatif l tel que $q = 2l$, donc la fraction $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2l}$ n'est pas irréductible, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1.7.5 Démonstration par contraposée

Démonstration par contraposée** est une méthode de preuve en mathématiques et en logique qui consiste à démontrer la vérité d'une proposition en montrant que sa contraposée est vraie. Voici un résumé de cette méthode :

1. Contraposée : Pour utiliser la démonstration par contraposée, on commence par examiner la contraposée de la proposition que l'on souhaite prouver. La contraposée d'une proposition est la négation de sa conséquence, c'est-à-dire que si la proposition originale est de la forme "Si A, alors B," la contraposée est "Si non-B, alors non-A."

2. Démonstration de la Contraposée : On démontre ensuite que la contraposée est vraie. Cela peut se faire en utilisant des arguments logiques, des preuves mathématiques, ou d'autres méthodes appropriées.

3. Conclusion : Si la contraposée est démontrée comme vraie, on peut alors conclure que la proposition originale est également vraie. Cela découle de la logique de la contraposée, où l'invalidité de la conséquence implique l'invalidité de l'hypothèse.

Exemple. Soit n un entier, montrer l'implication suivante : Si n^2 est impair alors n l'est aussi.

Solution. Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$ avec $l = 4k^2 + 4k \in \mathbb{N}$. n en résulte que n^2 est impair. Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 l'est de même. Par contreproposition, ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair.

1.7.6 Démonstration par contre-exemple

La Démonstration par Contre-Exemple est une méthode de preuve en mathématiques et en logique qui consiste à réfuter une proposition en présentant un exemple spécifique qui contredit

cette proposition. Voici un résumé de cette méthode :

1. Hypothèse de la Proposition : On commence par examiner la proposition que l'on souhaite réfuter. Cette proposition peut être de n'importe quelle forme, mais elle doit être clairement définie.

2. Présentation d'un Contre-Exemple : Pour réfuter la proposition, on présente un exemple concret qui ne satisfait pas aux conditions de la proposition. En d'autres termes, on montre un cas spécifique où la proposition est fausse.

3. Définition de l'Exemple : On décrit en détail l'exemple et explique comment il viole les conditions de la proposition. Il est important que l'exemple soit clair et vérifiable.

4. Conclusion: Après avoir présenté un contre-exemple, on conclut que la proposition est fausse. Le contre-exemple démontre que la proposition ne tient pas dans tous les cas possibles.

Exemple. Montrer que l'assertion suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés". (Les carrés sont les $0^2, 1^2, 2^2, \ldots$, par exemple $6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$).

Solution. Un contre-exemple est 7 : les carrés inférieurs à 7 sont $0, 1, 4$ mais avec trois de ces nombres on ne peut faire 7.

1.7.7 Démonstration par récurrence

La Démonstration par Récurrence est une méthode de preuve en mathématiques, particulièrement utile pour démontrer la véracité d'énoncés mathématiques qui dépendent d'un entier naturel n. Voici un résumé de cette méthode :

1. Étape de Base : La démonstration par récurrence commence par l'étape de base, où l'on prouve que l'énoncé est vrai pour n = 1 (ou une autre valeur de départ). Il s'agit souvent d'une simple vérification.

2. Hypothèse de Récurrence : On suppose que l'énoncé est vrai pour un certain entier k (k est généralement une valeur arbitraire, mais supposée fixe pour l'hypothèse de récurrence). On appelle cela l'hypothèse de récurrence.

3. Démonstration pour k + 1 : On démontre ensuite que si l'énoncé est vrai pour k, il est également vrai pour k + 1. Cela implique généralement de montrer que l'énoncé pour k + 1 est basé sur l'hypothèse de récurrence.

4. Conclusion de la Récurrence : En utilisant l'étape de base et l'hypothèse de récurrence, on peut conclure que l'énoncé est vrai pour tous les entiers naturels n.

Exemple. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 2^n > n$.

Solution. Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion : $2^n > n$. Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation: Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité: Fixons $n \geq 0$. Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie. $2^{n+1} = 2^n + 2^n > n + 2^n$ (car par $P(n)$ nous savons $2^n > n$), donc $2^{n+1} > n + 1$ (car $2^n > 1$). Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion: Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.

Chapter 2

Calcul propositionnel

2.1 Alphabet et mot

Soit A un ensemble quelconque (fini ou infini) les éléments de A seront appelés des lettres et A luis même sera appelé alphabet.

Définition2.1. Un mot sur l'alphabet A est une suite finie d'éléments de A

$$U = U_1 U_2 \ldots . U_n$$

n est la longueur du mots U.

L'ensemble du mots sur A sera noté A^*.

Sur A^* on définit l'opération de concotenation :

$$A^* \times A^* \longrightarrow A^*$$

$$(U, V) \longmapsto U.V = U_1 \cdot U_2 \ldots . U_n \cdot V_1 \cdot V_2 \ldots V_m$$

Avec: $U = U_1 \ldots U_n$ et $V = V_1 \ldots V_m$

La longueur d'un mot définit une application :

$$l : A^* \longrightarrow N$$

$$U = u_1 . u_2 ... u_n \longmapsto l(u) = n \text{ (} n \text{ la longueur de } u)$$

la concaténation est une opération associative est a pour élément neutre le mot vide ε :

$$u \cdot \epsilon = \epsilon \cdot u = u$$

Autrement dit $(A^*, .)$ monoïde.

Définition2.2. On dit que $a \in A$ a une occurrence dans le mot u si a est une lettre de u, i.e: si $u = u_1 u_2 \dots u_n$ donc: $\exists k \in \{1, 2, \dots n\}$ t.q : $a = u_k$

Remarque. il peut y avoir plusieurs occurrences de a dans u.

Exemple.

$$A = \{a, b \dots x, y, z\}$$

$$u = abaab$$

$$l(u) = 5$$

la lettre a á trois occurrences dans u et la lettre b en a deux occurrences dans u.

Propriété 2.1

- $l(uv) = l(u) + l(v)$
- $uv = uw \Rightarrow v = w$
- $uv = vw \Rightarrow u = w$

Définition2.3. le mot u est un préfixe du mot v s'il existe un mot de $w \in A^*$ t.q : $v = uw$. u est un suffixe de v si $\exists w \backslash v = wu$

2.2 Syntaxe des formules propositionnelles

Définition2.4. les connecteur propositionnels sont les symboles :

$\rceil$: Pour la negation (non)

$\wedge$: pour la conjonction (et)

$\vee$: pour la disjonction (ou)

$\longrightarrow$: pourl'implication

$\longleftrightarrow$: pour l'quivalence

Soit P un ensemble non vide des propositions élémenteures ou atomiques, les éléments de P seront notés : p, q, r, s.

Remarque.

1- En logique élémentaire une proposition est une énoncé qui sera á communiquer des faits : $p =$ il peut, $q =$ il fait beau

2- P ne contient pas les connecteurs $\rceil, \wedge, \vee \longrightarrow, \longleftrightarrow$;on considère l'alphabet suivante:

$$A = P \cup \{\rceil, \wedge, \vee \longrightarrow \longleftrightarrow, ()\}$$

Soit A^* l'ensemble des mots sur A on a :

$$(p \longrightarrow q) \in A^*$$

$$(p \in A^*$$

$$p \in A^*$$

$$() \in A^*$$

$$(pq\wedge) \in A^*$$

Définition2.5. L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules propositionnelles est le plus petit sous ensemble de A^* qui vérifie:

1- $P \subseteq \mathcal{F}$ (toute proposition élémentaire est une formule).

2- $F \in \mathcal{F} \Longrightarrow \rceil F \in \mathcal{F}$

3- $F, G \in \mathcal{F} \Longrightarrow (F * G) \in \mathcal{F}$ avec $*, =, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$

Remarque.

1- Les formules de suites sont des mots i.e des suit de symboles sans aucune signification l'attribution d'un sens i.e d'une valeur "vrais " ou "fausse" a une formule constitue le sémantique de formule .

2- Le terme " plus petit"est à prendre au sens de l'inclusion des ensembles de $\mathcal{F}$ est donc l'intersection de toutes les parties de A^* qui vèrifient les propriétès 1,2 est cette intersection est non vide puisque A^* lui même vérifie ces proprietés donc: $\mathcal{F} = \bigcap_{Y \subseteq A^*} Y$ et Y vérifie 1,2 et 3 .

Exemples.

- $(\neg p \longrightarrow q)$ est une formule .
- $(p \wedge q \wedge r)$ n'est pas une formule.
- $(\neg p \longrightarrow q)$ est une formule .
- p est une formule
- $(p \longrightarrow q \vee r)$ n'est pas une formule.

Définition2.6. La longueur d'une formule F est le nombre des lettres dans F, $l(F) = \sharp$ lettres dans F

Exemple. $F = (p \wedge q)$; $l(F) = 5$; $F = p$; $l(F) = 1$.

Remarque :Il n'y a pas de formule de longueur 0

- Il est possible de donner de l'ensemble $\mathcal{F}$ une description plus explicite : nous allons pour cela définir, par récurrence, une suite $(\mathcal{F}_n)_n \in \mathbb{N}$ de parties de A^*, on pose $\mathcal{F}_0 = p$ et pour chaque n

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \{\rceil F, F \in \mathcal{F}_n\} \cup \{(F * G); F, G \in \mathcal{F}_n, * \in \{\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}\}$$

On notera que la suite que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante on a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$on a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

(pour $n \leq m$, on $a\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_m$)

Proposition2.1. $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$

Preuve. Posons $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$:

Z est une partie de A^* qui vérifie les propriétés 1,2 et 3 donc $\mathcal{F} \subseteq Z$(car $\mathcal{F}$ est le plus petit sous ensemble de A^* vérifier 1,2 et 3)

$Z \subseteq \mathcal{F}$?

On montre par récurrence que, pour chaque entier n, on a $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$?

Si $n = 0, p = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}$ par définition, on suppose (hypotèse de récurrence) $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ alors $\mathcal{F}_{n+1} \subseteq \mathcal{F}$ d'aprés la définition de $\mathcal{F}_{n+1}$ et les propriétés de stabilité de $\mathcal{F}$

Définition2.7. La hauteur d'une formule $F \in \mathcal{F}$ est le plus petit des entiers n tels que : $F \in \mathcal{F}$. Elle noté $h[F]$

$$h(F) = \min\{n/F \in \mathcal{F}_n\}$$

Exemple.

- $F = p, \quad h(F) = 0$
- $F = (p \wedge q), \quad h(F) = 1$
- $F = \rceil p, \quad h(F) = 1.$
- $F = (\rceil p \wedge q); \quad h(F) = 2.$

2.3 Principe d'indication sur l'ensemble des formules

Supposons que nous voulions démontrer qu'une certaine proposition $Q(F)$ est vérifiée par toute $F \in \mathcal{F}$. Nous pouvons pour cela faire un raisonnement par récurrence (au sens usuel) sur la hauteur de F : nous serons alors amenés à montrer, d'abord que $Q(F)$ est vraie pour toute formule F appartenant a $\mathcal{F}_0$ puis que si $Q(F)$ est vraie pour toute $F \in \mathcal{F}_n$, alors $Q(F)$ est également vraie pour toute $F \in \mathcal{F}_{n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$.

Principe. Si $Q(F)$ vérifie:

1) $Q(p)$ vraie $\forall p \in P$ i.e $(Q(F)$ vrais par $F \in \mathcal{F}_n)$.

2) $Q(F)$ vraie $\Rightarrow Q(\rceil F)$ vraie.

3) $Q(F)$ vraie et $Q(G)$ vraie $\Rightarrow Q(F * G)$ vraie $*, , \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftarrow,$

alors $Q(F)$ est vraie $\forall F \in \mathcal{F}$.

Exemple. $Q(F)$ "F a tout de parenthèses ouvrantes que fermantes " i.e: $Q(F) = "O(F) = f(F)"$ on montrer que $Q(F)$ est vraie, $\forall F \in \mathcal{F}$ pour cela posons : $O(F) = \sharp$ parenthèses ouvrantes, $f(F) = \sharp$ parenthèses fermantes.

1) Soit $F = p \in P, \quad O(F) = f(F) = 0$, donc: $Q(p)$ est vraie.

2) On suppose que $Q(F)$ vraie $\Rightarrow Q(\urcorner F)$ vraie.

$$O(F) = f(F)$$

$$O(\urcorner F) = O(F) = f(F) = f(\urcorner F) \text{ i.e } : O(\urcorner F) = f(\urcorner F) \text{ i.e : } Q(\urcorner F) \text{ est vraie.}$$

3) Supposons que :

$$\left.\begin{array}{l} O(F) = f(F) \text{ et } O(G) = f(G) \\ O((F * G)) = O(F) + O(G) + 1 \\ f((F * G)) = f(F) + f(G) + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow O((F{*}G)) = f((F{*}G)) \text{ donc } Q((F{*}G)) \text{ est vraie.}$$

Sous formules.

On définit l'ensemble $sf(F)$ des sous formules de F par:

- Si $F = p, sf(F) = \{p\}$
- Si $F = \urcorner G, sf(F) = \{sf(G)\} \cup \{F\}$.
- Si $F = (G * H), sf(F) = \{sf(G)\} \cup \{H\} \cup \{F\}$.

Exemple.

$$F = \urcorner((\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{G} \wedge r) \Longleftrightarrow \underbrace{s}_{H})$$

$$= \urcorner (\underbrace{G \Longleftrightarrow H}_{K}) = \urcorner K$$

$$sf(F) = sf(\urcorner K) = sf(K) \cup \{F\}$$

$$K = (G \Longleftrightarrow H)$$

$$sf(K) = sf(G) \vee sf(H) \cup \{K\}$$

$$H = s, \; donc : sf(H) = \{s\}$$

$$G = ((\underbrace{p \Rightarrow q}_{G_1}) \wedge \underbrace{r}_{G_2}) = (G_1 \wedge G_2)$$

$$sf(G) = sf(G_1 \wedge G_2) = sf(G_1) \vee sf(G_2) \cup \{G\}$$

$$sf(G_2) = \{r\}$$

$$G_1 = (p \Rightarrow q) \, donc, \; sf(G_1) = sf(p \Rightarrow q) = \{p \, , q\} \cup \{p \Rightarrow q\}$$

$$sf(F) = \{p, \, q, \, r, \, s, \, (p \Rightarrow q), \, (p \Rightarrow q) \wedge r, \, ((p \Rightarrow q) \wedge r) \Longleftrightarrow s, \, F\}$$

2.4 L'interprétation d'une formule logique

2.4.1 Arbre de décomposition d'une formule

l'arbre A_F de la formule F est définie par récurrence sur F

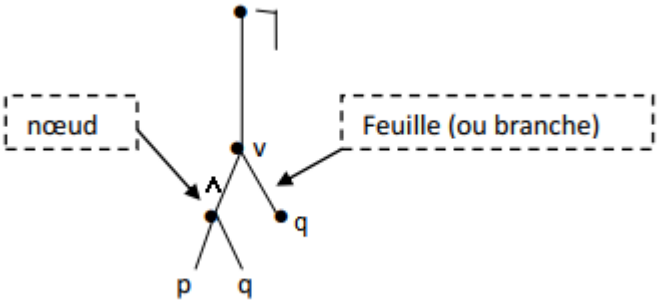
• $Si\ F = p, alors\ A_F = {}^0p$.

• $Si\ F = \rceil G, alors\ A_F = q^{\neg}_{A_G}$.

• $Si\ F = (G * H)\ alors\ A_F =$ $\overset{*}{\underset{A_G \quad A_H}{/\backslash}}$

Avec : $*, =, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Longleftrightarrow$

Exemple. $F = \rceil((p \wedge q) \vee q)$



Exemple. $M = (((A \wedge (\rceil B \Rightarrow \rceil A)) \wedge (\rceil B \vee \rceil C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \rceil A))$

On posons : $M_0 = ((A \wedge (\rceil B \Rightarrow \rceil A)) \wedge (\rceil B \vee \rceil C))\ et\ M_1 = (C \Rightarrow \rceil A)$

il constatera d'abord que M s'écrit $(M_0 \Rightarrow M_1)$

ensuite posons : $M_{00} = (A \wedge (\rceil B \Rightarrow \rceil A))$, $M_{01} = (\rceil B \vee \rceil C)$, $M_{10} = c$, $M_{11} = \rceil A$ il écrira $M_0 = (M_{00} \wedge M_{01})\ et\ M_1 = (M_{10} \Rightarrow M_{11})$ pour suivant ainsi, il sera amené à poser successivement :

$M_{000} = A$, $M_{001} = (\rceil B \Rightarrow \rceil A)$

$M_{010} = \rceil B$, $M_{011} = \rceil c$

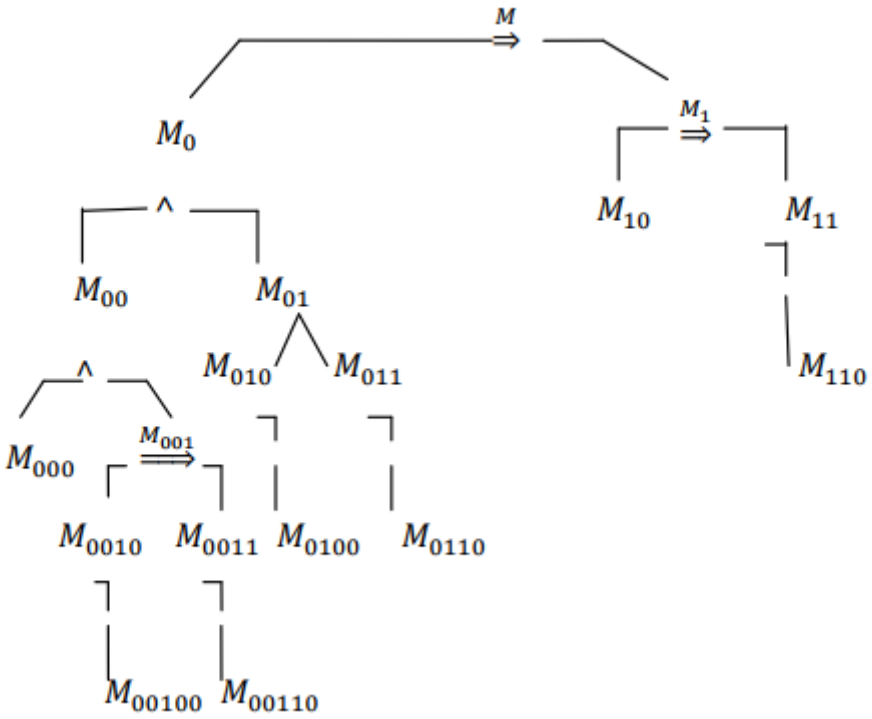
$M_{110} = A$, $M_{0010} = \rceil B$

$M_{0011} = \rceil A$, $M_{0100} = BM_{0110} = C$, $M_{00100} = B$, $M_{00110} = A$ de telle sort que :

$M_{00} = (M_{000} \wedge M_{001})$, $M_{01} = (M_{010} \vee M_{011})$, $M_{11} = \rceil M_{110}$, $M_{001} = (M_{0010} \Rightarrow M_{0011})$,

$M_{010} = \rceil M_{0100}$, $M_{011} = \rceil M_{0110}$, $M_{0010} = \rceil M_{00100}\ et\ M_{0011} = \rceil M_{00110}$

$h(M) = 5$ i.e : $M \in \mathcal{F}_5$.

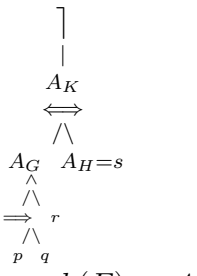


Définition2.8. L'hauteur d'un arbre est le nombre maximum de feuillets de la racine à une extrémité de l'arbre, dans l'exemple 1 $h(F) = 3$.

Exemple. $F = \neg((\underbrace{(p \Rightarrow q)}_{G} \wedge r) \iff \underbrace{s}_{H})$

$F = \neg(\underbrace{G \iff H}_{K}) = \neg K$

$A_F = \overset{\neg}{\underset{A_K}{|}}\ ; K = (G \Leftrightarrow H)$



$h(F) = 4$

Chaque nœud n détermine un sous-arbre A_n qui correspondance à une sous-formule F. Inversement l'arbre de chaque sous-formule est une sous- arbre de l'arbre de la formule

Ainsi :

Sous- formules de F = Sous-arbre de A_F

2.4.2 Substitution dans une formule

Soit F une formule et soient p_1, p_2, ..., p_n des proposition élémentaires.

L'écriture $F[p_1, p_2, ..., p_n]$ signifie que les lettres de P qui sont dans F sont parmi les $p_i, i = 1, 2, ..., n$.

Exemple. $F = (p \iff (p \wedge q))$ on écrira $F[p, q]$, soit $F = F[p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n]$ une formule et soient $G_1, G_2, ..., G_n, n$ formules.

Définition2.9. On appelle $F\left[\frac{G_1}{p_1}, \frac{G_2}{p_2}, ..., \frac{G_n}{P_n}\right]$ le mot obtenu par remplacement (substitution) de G_i à la place de p.

Autre notation. $F_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{P_n}} = F[G_1, ..., G_2, q_1, q_2, ..., q_n]$

Exemple. $F = (p \iff (p \wedge q)) = F[p, q], on prend\, G = (q \Rightarrow p)$

$F_{\frac{G}{p}} = F(G, q) = ((q \Rightarrow p) \iff ((p \Rightarrow q) \wedge q))$

Proposition. Le mot $F\left[\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{P_n}\right]$ est aussi une formule.

Preuve. On raisonne par induction sur le formule F

- $F = p$
  - si $F = p_k$ alors $F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = G_k$
  - si $F = p \neq p_1, p_2, \ldots, p_n$, et $F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = F$ dans les deux cas, aux a une formule.

- $F = \neg G$, *on suppose* $G_{\frac{G_1}{p_1}, \ldots} G_{\frac{G_n}{p_n}}$ formule.

Alors $F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = \neg G_{\frac{G_1}{p_1}, \ldots} G_{\frac{G_n}{p_n}}$ est aussi une formule.

$* F(G * H)$ avec $* = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ même raisonnement.

Théorème2.1 (Substitution et valuations). Soit v une valuation, F, G_1, G_2, ..., G_n des formules et p_1, p_2, ..., p_n des propositions élémentaires, soit v' la valuation défini par :

$$v'(p) = \begin{cases} v(p) \; si \; p \neq p_1, p_2, ..., p_n. \\ \bar{v}(G_i) \; si \; p = p_i \;\; (1 \leq i \leq n). \end{cases}$$

Alors : $\bar{v}\,(F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(F)$

Preuve.

1) $* \; F = p$

$* \; Si \; p \neq p_i, \; alors : F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = F \; et \; \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(F) = v(F) = v'(F) = \bar{v'}(F)$

$* Si \; p = p_i \; alors, \; F_{\frac{G_1}{p_1}}, F_{\frac{G_2}{p_2}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}} = G_i \; et \; : \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., F_{\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(G_i) = v'(p_i) = v'(F)$

$= \bar{v'}(F)$

2) $F = \rceil \, G \; et \; \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(G)$

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(\rceil \, G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v'}(G) = \bar{v'}(\rceil \, G) = \bar{v'}(F)$

$* F = (G * H)$

Si $= 1$, $F = (G \wedge H)$ et $\bar{v}(\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}) = \bar{v'}(G)$ et $\bar{v}(H_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(H)$,

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}, ..., \frac{G_n}{p_n}} \wedge H_{\frac{G_1}{p_1}}, ..., \frac{G_n}{p_n}) = \bar{v}(G).\bar{v}(H) = \bar{v'}(G).\bar{v'}(H) = \bar{v'}((G_1 \, H))$

$= \bar{v'}(F)$ même chose pes les autre cas $*, =, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Corolaire. Si F est une autre tautologie alors la forme $F_{\frac{G_1}{p_1} ... \frac{G_n}{p_n}}$ est aussi une tautologie.

Preuve. Pour tout valuation v on a $\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1} ... \frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(F_{\frac{G_1}{p_1} ... \frac{G_n}{p_n}})$

Théorème2.2. Soit F une formule, G une sous-formule de F et H une formule équivalente à G alors : $F' = F_{\frac{H}{G}}$ et logiquement équivalente à F

Preuve. Par indication sur les formules

- $Si \; F = p, \; G = F \; et \; F' = H \; et donc \; F' \sim F.$
- $Si \; F = \rceil \, F_1 \; alors \; G = F \; et donc \; H = F' \; et \; F \sim F' \; ou \; G \; est \; une \; sous-formule \; de \; F_1,$

$F'_1 = F_{1\frac{H}{G}} \sim F_1$, *donc* $F' = \rceil F'_1 \sim F$

• *Si* $F = F_1 * F_2$, $* = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. $* = \wedge$, $F = F_1 \wedge F_2$alors il ya trois possibilités. ou bien $G = F, F' = H$ et on a $F' \sim F$.ou bien G est une sous-formule de F_1, et par hybothèse d'indication, la formule F'_1, résultat de la substitution de H àG dans F_1, et logiquement équivalente à F_1. La formule F' est alors la formule ($F'_1 \wedge F_2$) elle est logiquement équivalente àF car,pour toute valuation v, on a $\bar{v}(F') = \bar{v}(F'_1).\bar{v}(F_2) = \bar{v}(F_1).\bar{v}(F_2) = \bar{v}((F_1 \wedge F_2)) = \bar{v}(F)$ le raisonnement est tout à fait similaire dans la troisième éventualité, celle où G est une sous-formule de F_2 les cas $F = (F_1 \cup F_2)$, $F = (F_1 \Rightarrow F_2)$, $F = (F_1 \Leftrightarrow F_2)$ se traitent de façon analogue, en utilisant les propriétés :

$$v(\rceil F) = 1 + v(F)$$
$$v((F \vee G)) = v(F) + v(G) + v(F).v(G)$$
$$v((F \Rightarrow G)) = 1 + v(F) + v(F).v(G)$$
$$v(F \Rightarrow G) = 1 + v(F) + v(G).$$

2.5 Sémantique

Définition2.10. Une distribution de valeurs de vérité ou valuation v est une application : $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$ où P est l'ensemble des propositions élémentaires. On dit que v définit un modèle $\mathcal{M}$ des calcules propositionnel les valeurs $0 et\ 1$ représentent "vrais" et "faux" et peuvent aussi être notées $v = 1$, $F = 0$, $v \neq V$ Si Pde cardinale n le nombre de valeurs de vérité différentes est exactement $2^n = 2^{\sharp P}$.

Exemple. $P = \{p, q\}$ on a donc $2^2 = 4$

1 1

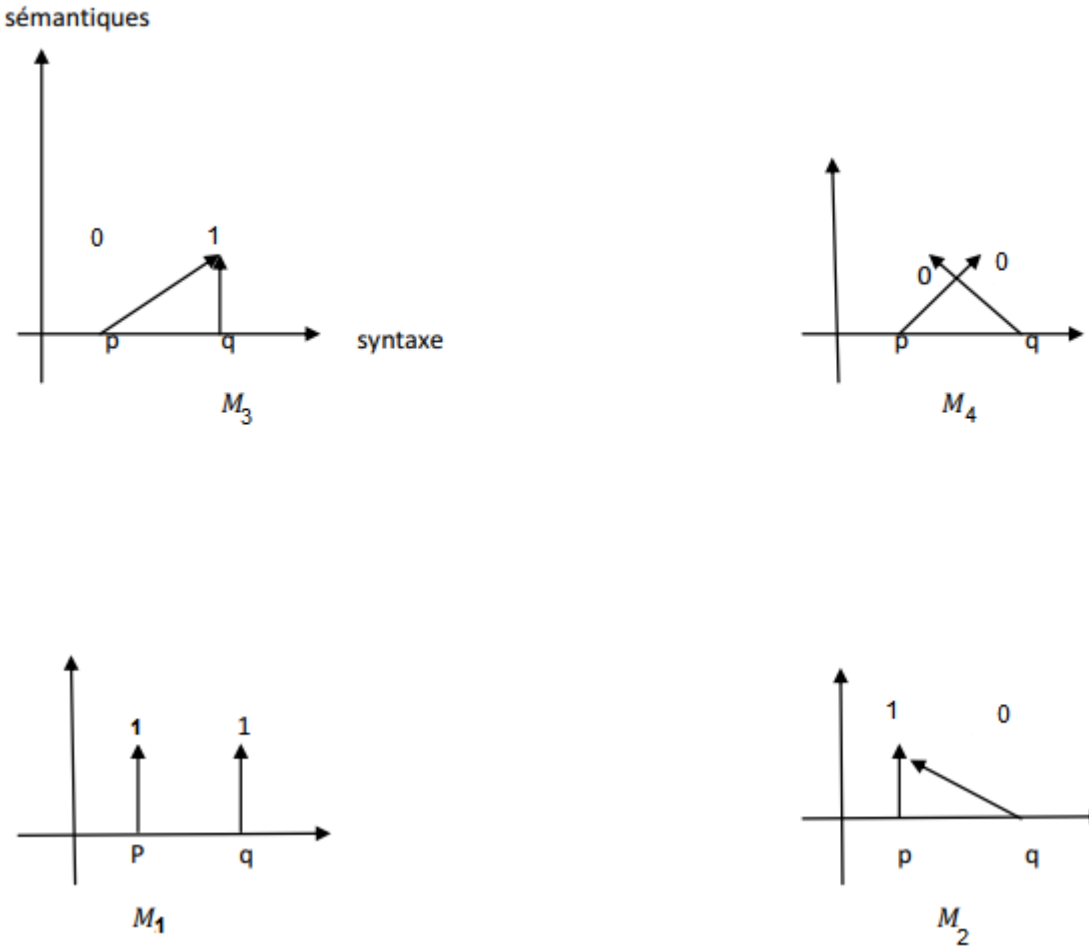
1 0

0 1

0 0 ?

$$v_1 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\} \qquad v_2 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$p \longrightarrow 1 \qquad p \longrightarrow 1$$
$$q \longrightarrow 1 \qquad q \longrightarrow 0$$
$$v_3 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\} \qquad v_4 : P \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$p \longrightarrow 0 \qquad p \longrightarrow 0$$
$$q \longrightarrow 1 \qquad q \longrightarrow 0$$

Le but de la sémantique est de donner des valeurs de vérité aux formules du calcul des propositions pour les différentes valuation définies sur les propositions élémentaires.



Théorème2.3. Pour toute valuation $v : P \longrightarrow \{0\,,\,1\}$ il existe une unique extension $\bar{v}$: $\mathcal{F} \longrightarrow \{0\,,\,1\}$ $(i.e\ \bar{v} = v\ sur\ P)$ et qui est telle que :

1) $\bar{v}(\neg F) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = 0$.

2) $\bar{v}((F \wedge G)) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = \bar{v}(G) = 1.$

3) $\bar{v}((F \vee G)) = 0 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = \bar{v}(G) = 0$

4) $\bar{v}((F \Rightarrow G)) = 0 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = 1 \, et \, \bar{v}(G) = 0.$

5) $\bar{v}((F \Leftrightarrow G)) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v}(F) = \bar{v}(G)$

Preuve. Soient $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$ deux extensions de v et soit $Q(F)$ la proposition

"$\bar{v}_1(F) = \bar{v}_2(F)$". On doit montrer que $Q(F)$ est vrais, $\forall F \in \mathcal{F}$

• $Si \, F = p : \bar{v_1}(F) = \bar{v_2}(F) = v(F)$ donc $Q(F)$ est vraie.

• $Si \, F = \rceil G \; et \; Q(G)$ est vraie.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v_1}(F) = 1 \Longleftrightarrow \bar{v_1}(G) = 0 \\ \bar{v_1}(F) = 0 \Longleftrightarrow \bar{v_1}(G) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \bar{v_1}(F) = \bar{v_2}(F)$$

Donc : $Q(F)$ est vraie aussi.

• Même chose pour $F = (G * H), * = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Remarque. Si on définit $+ \; et \; .$ dans $\frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} = \{0\,, 1\}$ par

$0 + 0 = 0 \qquad 0 \times 0 = 0$

$0 + 1 = 1 \qquad 0 \times 1 = 0$

$1 + 0 = 1 \qquad 1 \times 0 = 0$

$1 + 1 = 0 \qquad 1 \times 1 = 1$

les conditions $1) \; et \; 5)$ deviennent :

1) $\bar{v}(\rceil F) = 1 + \bar{v}(F).$

2) $\bar{v}((F \wedge G)) = \bar{v}(F)\,\bar{v}(G).$

3) $\bar{v}((F \vee G)) = \bar{v}(F) + \bar{v}(G) + \bar{v}(F)\,\bar{v}(G)$

4) $\bar{v}((F \Rightarrow G)) = 1 + \bar{v}(F) + \bar{v}(F)\,\bar{v}(G).$

5) $\bar{v}((F \Leftrightarrow G)) = 1 + \bar{v}(F) + \bar{v}(G)$

ces conditions sont aussi souvent écrites sous forme de vérité pour les connecteurs $\rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

F	$\neg F$
0	1

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Exemple. $F = \neg(((p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow q) \wedge (r \Leftrightarrow s)) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$

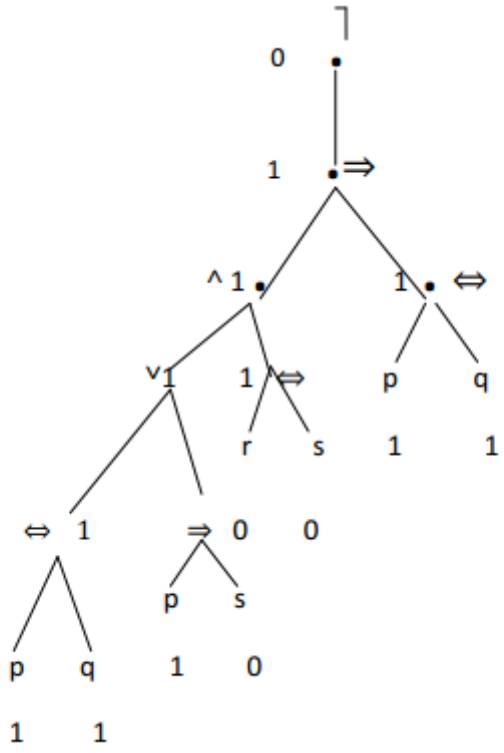
on suppose que $P = \{p, q, r, s\}$

$$v : P \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$p \longrightarrow 1$$
$$q \longrightarrow 1$$
$$r \longrightarrow 0$$
$$s \longrightarrow 0$$

Calculer $\bar{v}(F)$, donc : $\bar{v}(F) = 0$

F	G	$(F \Rightarrow G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

F	G	$F \Leftrightarrow G$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1



2.6 Tautologie et équivalences logiques

Soit v une valeur de vérité définissant un modèle $\mathcal{M}$ du calcul propositionnel et soit $\bar{v}$ son extension sur les formules.

Définition2.11.

1) Le formule F est dite satisfaite dans le modèle $\mathcal{M}$ si $\bar{v}(F) = 1$, on note $\mathcal{M} \models F$ si non elle est dite non satisfaite $\bar{v}(F) = 0$, on note $\mathcal{M} \not\models F$.

2) F est une tautologie si pour tout modèle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models F$, on note $\vDash F$.

Exemple. $F = (p \vee \rceil\, p)$, , $P = \{p\}$ â valeur de vérité $\bar{v}_2(F) = 1$ F est une anti tautologie si por tout modéle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \not\models F$, on note $\not\models F$.

Exemple. $F = (p \wedge \rceil\, q)$, $P = \{p\}$, $v_1 : p \longrightarrow 1$, $\bar{v}_1(F) = 0$

, $v_2 : p \longrightarrow 0$, $\bar{v}_2(F) = 0$.

- Une tautologie est donc une formule toujours vraie ($\forall$ la valuation).

- Une anti tautologie est une formule toujours fausse.

3) est logiquement équivalente à G si ($F \Leftrightarrow G$) est une tautologie, on note $F \sim G$. Autrement dit $\bar{v}(F) = \bar{v}(G)$ pour toute valuation v.

Exemple. $F = p$, $F \sim G$, *car* $(p \Leftrightarrow \rceil\rceil p)$ est une tautologie $G = \rceil\rceil p$.

Remarque.

1) En terme de table de vérité, une tautologie est une formule qui a des 1 par tout dans sa dernière colonne.

- Une anti-tautologie a des 0 par tout sur sa dernière colonne.

- Deux formules logiquement équivalentes ont les même tables de vérité.

2) $\sim$ définit sur $\mathcal{F}$ une relation d'équivalence l'ensemble quotient $\frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[F], F \in \mathcal{F}\}$, $[F] = \{G \in \mathcal{F}/F \sim G\}$ = les classes d'équivalence de F. Quant on compare deux formules "à équivalence logique " cela veut dire qu'on compare les classe correspondantes dans $\frac{\mathcal{F}}{\sim}$.

$$\left.\begin{array}{l} F\,tautologie \iff \forall\, v,\, \bar{v}(F) = 1 \\ G\,tautologie \iff \forall\, v,\, \bar{v}(G) = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow F \sim G$$

donc : toutes les tautologie sont logiquement équivalentes est froments la classe 1 . De même toutes les anti-tautologies sont logiquement équivalentes et forment la classe 0.

3) $F = G \Rightarrow F \sim G$.

$F \sim G \not\Rightarrow F = G$.

$F \sim G \Rightarrow [F] = [G]$.

Exemple. Voici quelques tautologies sous-forme d'équivalence :

1) Idempotente de la conjonction et de la disjonction

$((p \wedge p) \Longleftrightarrow p)$

$((p \vee p) \Longleftrightarrow p)$

2) Commutativité de la conjonction, disjonction et équivalence :

$((p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p))$, $((p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p))$, $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p))$

3) Associativité de la conjonction, disjonction, équivelence :

$(((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r)))$, $(((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)))$,

$(((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)))$

4) Distributivité de la disjonction/conjonction et réciproquement :

$(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$, $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

5) Absorption :

$((p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p)$, $((p \vee (p \wedge q)) \Leftrightarrow p)$

6) Lois de Demorgan :

$(\rceil (p \vee q)) \Leftrightarrow (\rceil p \wedge \rceil q)$, $(\rceil (p \wedge q)) \Leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil q)$

7) Contra posé e :

$((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p))$

8) $(\rceil \rceil p \Leftrightarrow p)$, $((p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee q))$

Voici des formules non équivalentes :

$(p \wedge p)$ *et* $(q \wedge q)$ $(prendre\ v(p) = 1 - v(q))$

$(p \Rightarrow p)$ *et* p $(prendre\ v(p) = 0)$

$(p \Leftrightarrow q)$ *et* $(p \Rightarrow q)$ $(prendre\ v(p) = 0, v(q) = 1)$

$(p \Rightarrow (p \Rightarrow p))$ *et* $((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$ $(prendre\ v(p) = 0))$

Remarque. Grâce à l'associativité de $\wedge$ *et* $\vee$ on peut adapter les notations suivantes : La formule $((F \wedge G) \wedge H)$ sera notée $(F \wedge G \wedge H)$.

La formule $((F \vee G) \vee H)$ sera notée $(F \vee G \vee H)$. plus généralement, pour tout entier naturel non k si F_1, F_2, ..., F_k sont des formules on représentera par :

$$\underbrace{(F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_k)}_{\bigwedge_{i=1}^{k} F_i} \underset{def}{=} F_1 \wedge (F_2 \wedge (... \wedge F_k ...))$$

$$\underbrace{(F_1 \vee F_2 \vee ... \vee F_k)}_{\bigvee_{i=1}^{k} F_i} \underset{def}{=} F_1 \vee (F_2 \vee (... \vee F_k ..))$$

dans la liste ci-dessous, les formule qui se trouvent sur une même ligne sont deux à deux logique équivalentes :

1) $(A \Rightarrow B)$, $(\neg A \vee B)$, $((A \wedge B) \Leftrightarrow A)$, $((A \vee B) \Leftrightarrow B)$.

2) $\neg(A \Rightarrow B)$, $(A \wedge \neg B)$.

3) $(A \Leftrightarrow B)$, $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$, $((\neg A \cup B) \wedge (\neg B \cup A))$.

4) $(A \Leftrightarrow B)$, $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$, $(\neg A \Leftrightarrow \neg B)$, $(B \Leftrightarrow A)$.

5) $(A \Leftrightarrow B)$, $((A \cup B) \Rightarrow (A \wedge B))$.

6) $\neg(A \Leftrightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow \neg B)$, $(\neg A \Leftrightarrow B)$.

7) A, $(A \wedge T)$, $(A \vee T)$, $(A \Leftrightarrow T)$, $(T \Rightarrow A)$.

8) $\neg A$, $(A \Rightarrow \neg A)$, $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B))$.

9) $\neg A$, $(A \Rightarrow \bot)$, $(A \Leftrightarrow \bot)$

10) $\bot$, $(A \wedge \bot)$, $(A \Leftrightarrow \neg A)$.

11) T, $(A \vee T)$, $(A \Rightarrow T)$, $(\perp \Rightarrow A)$.

12) $(A \Rightarrow (B \wedge C))$, $((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C))$.

13) $(A \Rightarrow (B \vee C))$, $((A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C))$.

14) $((A \wedge B) \Rightarrow C)$, $((A \Rightarrow C) \vee (B \Rightarrow C))$.

15) $((A \vee B) \Rightarrow C)$, $((A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C))$.

On retiendra des lignes de 12) à 15) qu'il n'y a pas distributivité de l'implication par rapport à la conjonction ou à les disjonction. On voit qu'il ya cependant distributivité à gauche 12) et 13), c'est à dire lorsque le "$\wedge$" ou le "$\vee$" se situent à droite du $\Rightarrow$. Dans le cas 14) et 15) on remarque qu'il ya une sorte de fausse distributivité le "$\wedge$"(resp :le $\vee$) étant transformé en "$\vee$"(resp :en $\wedge$.)

Théorème2.4 (substitutions et valuation) Soient v une valuation, F, G_1, G_2, ..., G_n des formules et p_1, p_2, ..., p_n des propositions élémentaires.

Soit v' la valuation défini par :

$$v' = \begin{cases} v(p) \; si \; p \neq p_1, p_2, ..., p_n. \\ \bar{v}(G_i) \; si \; p = p_i \;\; (1 \leq i \leq n) \end{cases}$$

Alors : $\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(F)$.

Preuve. On raisonne par indication sur les formules :

$* F = p$

- Si $p \neq p_i$ alors $F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}} = F \;\; et \;\; \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(F) = v(F) = v'(F) = \bar{v'}$.
- Si $p = p_i$ alors $F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}} = G_i \;\; et \;\; \bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(G_i) = v'(p_i) = v'(F) = \bar{v'}(F)$

$* F = \neg G \;\; et \;\; \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(G)$

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}(\neg G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = 1 + \bar{v'}(G) = \bar{v'}(\neg G) = \bar{v'}(F)$.

$* F = (G \wedge H) \;\; et \;\; \bar{v}(G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(G) \;\; et \;\; \bar{v}(H_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(H)$

$\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v}((G_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) \wedge (H_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}})) = \bar{v}(G).\bar{v}(H) = \bar{v'}(G).\bar{v'}(H) = \bar{v'}(G \wedge H) = \bar{v'}(F)$.

Même chose pour les autres cas.

Corolaire. Si F est une tautologie alors la forme $F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}$ est aussi une tautologie.

Preuve : Pour toute valuation v on a : $\bar{v}(F_{\frac{G_1}{p_1}\cdots\frac{G_n}{p_n}}) = \bar{v'}(F) = 1$.

2.7 Systèmes complets de connecteurs

Définition2.12.

1) Pour tout n-uple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, on note $V_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}$ la valuation définie par $V^{(p_i=\varepsilon_i)}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$

2) Pour chaque variable propositionnel p est pour chaque élément $\varepsilon \in \{0, 1\}$, nous notons ε_p la formule :

$$\varepsilon_p = \begin{cases} p \ si \ \varepsilon = 1 \\ \urcorner p \ si \ \varepsilon = 0 \end{cases}$$

3) Pour toute formule F on note par $\Delta(F) = \{v \in \{0, 1\}^n, \bar{v}(F) = 1\}$ toute formule F définit une application :

$$\varnothing_F : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \longmapsto \bar{v}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}(F)$$

$\varnothing_F$ est compatible avec la relation d'équivalence logique. Autrement dit

$F \sim G \Leftrightarrow \varnothing_F = \varnothing_G$.

$\varnothing_F$ définit donc par passage au quotient une application

$$\varnothing : \frac{\mathcal{F}}{\sim} \longrightarrow \{0, 1\}^{(0,1)^n}$$
$$.[F] \longmapsto \varnothing_F$$

$[F]$ la classe d'équivalence de la formule F pour la relation $\sim$

Théorème2.5 $\varnothing$ est une bijection.

Preuve.

1) $\varnothing$ **injective :** soient $[F]$, $[G]$ deux classes de formules

$\varnothing([F]) = \varnothing([G]) \Rightarrow \varnothing_F = \varnothing_G \Leftrightarrow F \sim G \Leftrightarrow [F] = [G]$.

Donc : $\varnothing$ est injective.

2) $\varnothing$ **surjective :** Soit $\varnothing : \{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}, \exists\, F \in \mathcal{F} / \varnothing = \varnothing\{F\}$?

$*$ Si $\varnothing$ ne prend que la valeur 0, alors toute anti-tautologie F vérifie $\varnothing = \varnothing_F$, par exemple $F = (p_1 \wedge \rceil\, p_1)$

$*$ Si non, l'ensemble $x = \oslash^{-1}(\{1\}) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n / \varnothing(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = 1\}$ est non vide.

Soit $F_x = \bigvee\limits_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\in X} (\bigwedge\limits_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i\, p_i)$, alors $\triangle(F_x) = \{\bigvee\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in X\}$.....$\circledast$ i.e : $\bar{v}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}(F_x) = 1 \Leftrightarrow \oslash(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) = 1$, donc : $\oslash = \oslash_{F_x}$

pour, $\circledast \forall\, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$, $\bigtriangleup (\bigwedge\limits_k \underset{k}{\varepsilon}\, \underset{k}{p}) = \bigvee\limits_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}$,
$\bigtriangleup(\bigvee\limits_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\in x} (\bigwedge\limits_i \underset{i}{\varepsilon}\, \underset{i}{p})) = \{v_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n},\, (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) \in x\}$, $\bar{v}(\bigwedge\limits_k \underset{k}{\varepsilon p}) = 1 \Leftrightarrow \bar{v}(\underset{k}{\varepsilon p}) = 1 \Leftrightarrow v(p_k) = v_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n}(p_k)$.

Corolaire. Si $\sharp\, P = n$ alors il ya exactement 2^{2^n} classes de formules correspondant chacune à une application $\varnothing : \{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

Définition2.12. Une application $\varnothing : \{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}$ est appelé connecteur propositionnel à n places.

Exemple.

1) Selon la définition précédente il correspond aux connecteurs à 2, places.

$$\begin{aligned} \varnothing : \{0\,,\,1\}^2 &\longrightarrow \{0\,,\,1\} \\ (0\,,\,0) &\longmapsto 0 \\ (0\,,\,1) &\longmapsto 0 \\ (1\,,\,0) &\longmapsto 0 \\ (1\,,\,1) &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Ou de façon équivalente à la classe de la formule $p_1 \wedge p_2$.

2) Un exemple de connecteur à une place est :

$$\begin{aligned} \varnothing : \{0\,,\,1\} &\longrightarrow \{0\,,\,1\} \\ 0 &\longmapsto 1 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Correspondant à la classe de $\rceil\, p_1$ est donc au connecteur usuelle $\rceil$.

3) Le connecteur à deux places suivant est appelé la barre de chefferie "ou".

$$\begin{aligned} \varnothing : \{0\,,\,1\}^2 &\longrightarrow \{0\,,\,1\} \\ (0\,,\,0) &\longmapsto 1 \\ (0\,,\,1) &\longmapsto 0 \\ (1\,,\,0) &\longmapsto 0 \\ (1\,,\,1) &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

de formule $\rceil(p_1 \vee p_2)$.

2.7.1 Formes normales

Définition2.13. Une formule F est dit sous-forme normale disjonction canonique (FNDC) s'il existe un sous-ensemble non vide x *de* $\{0\,,\,1\}^n / F = \bigvee_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,...,\varepsilon_n)\in X} (\bigwedge_{1\leq i\leq n} \varepsilon_i\, p_i)$ elle est dite sous-forme normale disjonctive (FND) s'il existe :

$*$ Un entier $m \geq 1$

$*$ Des entiers $k_1, ..., k_m \geq 1$

$*$ Pour $1 \leq i \leq m$, k_i variable $p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{ik_i}$ et k_i éléments $\varepsilon_{i_1}, ..., \varepsilon_{k_i}$ de $\{0\,,\,1\}$ tel que :

$$F = \bigvee_{1\leq i\leq m} (\varepsilon_{i_1}\, p_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2}\, p_{i_2} \wedge ... \wedge \varepsilon_{ik_i} p_{ik_i})$$

On définit de même les formes normales conjonctives (FNC) et conjonctives canonique (FNCC)(en échangeant les symboles de disjonction et de conjonction)

Remarque. Une FNDC est une FND. De même une (FNCC) est une (FNC)

$(n = k_i, \forall\, i, p_{ij} = p_j)$

Théorème2.6 Toute formule F est logiquement équivalente à une FNC et une FND.

Exemple. la barre de chiffre : "ou" $\rceil\,(p_1 \vee p_2) = (p_1 \vee p_2) \vee$:barre de chiffre "ou".

p_1	p_2	F
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\varnothing_F : \{0\,,\,1\}^2 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

$\{0\,,\,1\}^2 = \{(0,0)\,,\,(0,1)\,,\,(1,0)\,,\,(1,1)\}$

$(0,0) \longmapsto 1,\ (0,1) \longmapsto 0$

$F = \urcorner\,(p_1 \wedge p_2) \underset{def}{=} (p_1\ p_2)$

$\wedge$: barre de chiffre “et“

$$\varnothing = \varnothing_F : \{0\,,\,1\}^2 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$$
$$(0,0) \longmapsto 1$$
$$(0,1) \longmapsto 1$$

Un connecteur à n places est une application $\varnothing\,\{0\,,\,1\}^n \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

p_1	p_2	$\urcorner(p_1 \wedge p_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Exemple. $F = ((p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3)$

$\varnothing\,\{0\,,\,1\}^3 \longrightarrow \{0\,,\,1\}$

$(0,0,0) \longmapsto 1$

$(0,0,1) \longmapsto 1$

$(1,1,0) \longmapsto 0$

$\varnothing$ connecteur à 3 places.

Théorème2.7(de forme normale) Toute formule F est logiquement équivalente à (FND) au moins une formule sous-forme normale disjonctive et à au moins une formule sous-forme normale conjonctive (FNC).

Preuve. $*$ Si F est une tautologie, elle est logiquement équivalente à $p_1 \wedge \rceil p_1$ qui est une FND et une FNC. $*$ Si F ni une tautologie, ni une anti-tautologie alors par le théorème précédente, il existe $x \neq \varnothing / \varnothing_F = \varnothing_{F_x}$, x *de* $\{0\,,\,1\}^n$ i.e : $F \sim F_x$ qui est une FNDC donc aussi FND pour $\rceil F$, il existe aussi $x'/\rceil F \sim F_{x'}$, donc :
$F = \rceil\rceil F \sim \rceil(\vee(\wedge)) = \wedge(\vee) \sim FNCC$ (d'apré le loi de demorgan)

Exemple. $G = (A \Rightarrow (((B \wedge \rceil A) \vee (\rceil c \wedge A)) \Leftrightarrow (A \vee (A \Rightarrow \rceil B)))$ posons $H = (B \wedge \rceil A)$, $I = (\rceil c \wedge A)$, $j = (A \Rightarrow \rceil B)$, $k = (H \vee I)$, $L = (A \vee J)$ *et* $M = (K \Leftrightarrow L)$. On a alors $G = (A \Rightarrow M)$ la table de vérité de G :

A	B	C	$\rceil A$	$\rceil B$	$\rceil C$	H	I	J	K	L	M	G
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

d'apré la table de vérité G est satisfaite par les valuation $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ tendit que $\rceil G$ est satisfaite par $(1,0,1)$ et $(1,1,1)$ on enduit la FNDC de G :
$(\rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C) \vee (\rceil A \wedge \rceil B \wedge C) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge \rceil C)$
puis la FNDC de $\rceil G\,(A \wedge \rceil B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge C)$ et enfin la FNCC de G : $(\rceil A \wedge B \wedge \rceil C) \wedge (\rceil A \wedge \rceil B \wedge \rceil C)$

Exemple. $F = \rceil((\rceil p \Rightarrow q) \Rightarrow \rceil (q \Leftrightarrow p)$ on utilise l'équivalences :
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee q)$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((\rceil p \vee q) \wedge (\rceil q \vee p))$

$$F \sim \rceil(\rceil(\rceil p \Rightarrow q) \vee \rceil(q \Leftrightarrow p))$$
$$\sim \rceil(\rceil(\rceil\rceil p \vee q) \vee \rceil((\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)))$$
$$\sim \rceil(\rceil(p \vee q) \vee \rceil((\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)))$$

on utilise ensuite les lois de Demorgan :

$\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow (\rceil p \wedge \rceil q)$

$\rceil(p \vee q) \Leftrightarrow (\rceil p \vee \rceil q)$

donc :

$$F \sim \rceil\rceil(p \vee q) \wedge \rceil\rceil((\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q))$$
$$\sim (p \vee q) \wedge (\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)$$
$$\sim (p \vee q) \wedge (\rceil q \vee p) \wedge (\rceil p \vee q)$$

2.8 Système complets de connecteur

Définition2.14.

1) Soit $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ un ensemble de connecteur d'arité quelconques, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ est système complet ssi : pour toute formule $F \in \mathcal{F}$, il existe une formule G basée sur l'alphabet $P \cup \{\alpha_1, ..., \alpha_k\} \cup \{(,)\}$ tel que $F \sim G$

2) $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ est un système complet minimal si aucun sous-ensemble $A \underset{\neq}{\subset} \{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$ n'est pas un système complet.

Exemple : $\{\rceil, \vee, \wedge\}$ est système complet de connecteurs.

Proposition :

1)Le système $\{\rceil, \vee, \wedge\}$ n'est pas minimal.

2) Le système $\{\rceil, \vee\}$ est complet minimal.

3) Le système $\{\rceil, \wedge\}$ est complet minimal.

Preuve.

1) $(p \wedge q) \sim \rceil(\rceil p \vee \rceil q)$ donc 1 s'exprime en terme du $\rceil$ *et* $\vee$.

2) Supposons que $\vee$ s'exprime en terme de $\rceil$ toute formule est donc $\sim \rceil\rceil....\rceil p$ et donc à p ou $\rceil p$ ce qui n'est pas le cas de $(p \wedge q)$

2.8.1 Les théories

Définition2.15 Une théorie $\mathcal{Z}$ du calcul propositionnel est un ensemble de formules $T \subseteq \mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{M}$ un modèle défini par la valuation v on dit que :

1) T est satisfaite dans $\mathcal{M}$ *si* $\mathcal{M} \vDash F, \forall F \in T$ on écrit $\mathcal{M} \vDash T$.

2) T est consistant ou non contradictoire ou satis faible, s'il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \vDash T$.

3) T est finiment satis faible si et seulement si chaque sous-théorie finie $T' \subseteq T$ est satis faible (cette définition d'intérêt que pour les parties T infinies).

4) T est contradictoire ssi s'il n'est pas satis faible, i.e : n'a pas de modèle.

5) La formule F est une conséquence de T ssi tout modèle de T est un modèle de F, $\forall \mathcal{M}, \mathcal{M} \vDash T \Rightarrow \mathcal{M} \vDash F$, on note $T \vDash F$ ou $(T \underset{\vdash}{*} F)$.

6) T *et* T' sont deux théories équivalentes ssi elle ont exactement les même modèles ou (toute formule de T conséquence de T' et toute formule de T' et conséquence de T).

Exemples. considérons des variables propositionnelles deux à deux distinctes p, q, p_1, p_2, ..., p_m ...: l'ensemble $\{p, q, (\rceil p \vee q)\}$ est satis faible; $\{p, \rceil q\}$ est contradictoire; l'ensemble vide est satis fait par l'importe quelle valuation.

$\{p, q\} \vDash (p \wedge q)$, $\{p, (p \Rightarrow q)\} \vDash q$, l'ensemble $\{p, q\}$ et $\{(p \wedge q)\}$ sont équivalentes de même que $\{p_1, p_2, ..., p_m, ..\}$ *et* $\{p_1 \wedge p_2 \wedge ...p_m \wedge ...\}$.

Lemme. quelque soient les théories T *et* T' les entiers et $p \geq 1$ et les formules G, H, F_1, F_2, ...F_m et G_1, G_2, ...G_p les propriètés suivants sont vérifiées :

$*T \vDash G$ ssi $T \cup \{\rceil G\}$ est contradictoire.

$*$ Si T est satis faible et si $T' \subseteq T$ alors T' est satisfait.

$*$ Si T est satis faible, alors T est finiment satis faible.

$*$ Si T est contradictoire et si $T \subseteq T'$ alors T' est contradictoire.

$*$ Si $T \vDash G$ et si $T \subseteq T'$ alors $T' \vDash G$.

$*T \cup \{G\} \vDash H$ si et seulement si $T \vDash (G \Rightarrow H)$.

$*T \vDash (G \wedge H)$ ssi $T \vDash G$ *et* $T \vDash H$.

$*\{F_1, F_2, ..., F_m\} \vDash G$ ssi $\vDash ((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m) \Rightarrow G)$.

$*G$ est une tautologie ssi G est conséquence de l'élément.

$*G$ est une tautologie ssi G est conséquence de l'importe quel ensemble de formules.

$*G$ est contradictoire ssi $T \vDash (G \wedge \rceil G)$.

$*G$ est contradictoire ssi toute anti-tautologie est conséquence.

Chapter 3

Calcul des prédicats

Définition3.1 Une “prédicat“ est une affirmation qui porte sur des objets d'une théorie mathématique et qui peut être vraie ou fausse selon ses objets.

Exemple.

1) “être un nombre pair“ est vraie pour 2 mais fausse pour 5.

2) “être plus petit que“ est vraie pour (2,3) mais fausse pour (3,2)

Les calcules des prédicats permet de construire des énonce complexe à partir des prédicats en utilisant des symboles spéciaux pour représenter les variables, les fonctions sur ces variables et les relations entre elle. Certaine variable ne changent jamais : ce sont les constantes.

En se sens le calcule des prédicats est plus riche que le calcule des propositions.

3.1 Syntaxe du calcul des prédicats

3.1.1 Alphabet de premier ordre

Soit $V = \{x_0, x_1, x_2...\}$ un ensemble dont les éléments sont appelé variables.

$*\mathcal{C} = \{c_0, c_1, c_2, ..\}$ un ensemble dont les éléments sont les constantes.

$*\mathcal{F} = \bigcup_{n>0} \mathcal{F}_n$ sont les fonctions d'arité n.

$*\mathcal{R} = \bigcup_{n>0} \mathcal{R}_n$ une rennion d'ensemble $\mathcal{R}_n$ dont les éléments sont des relations d'arité n.

(On admet que $\mathcal{R}_2$ contient un élément particulier l'également)

$*$ Les symboles $\forall$ et $\exists$ (quelque soit, il existe).

Définition3.2 Un alphabet du premier ordre est un alphabet A de la forme :

$A = V, \cup \{(,), \rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$.

- La partie $\cup \cup \{(,), \rceil, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}$ est la partie logique de l'alphabet ou du langage.

- La partie $\sum = \mathcal{C} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F}$. est appelée la signature du langage.

- La partie logique est commune à tous les langage ce qui caractérise un langage est donc sa partie ne logique ou signature.

Exemple. Signature de l'arithmétique élémentaire

$\sum = \{+, ., <, 0, 1\}$

$\mathcal{C} = \{0, 1\}$

$\mathcal{F} = \{+, .\} = \mathcal{F}_2$

$\mathcal{R} = \{<, =\} = \mathcal{R}_2$

3.1.2 Termes

Définition3.3 l'ensemble des termes T construits à partir de A est la plus petite de A^* tel que: $1) \cup \cup \mathcal{C} \subseteq T$.

$2) t_1, t_2, ..., t_n \in T \Rightarrow f\, t_1, ..., t_n \in T, \forall f \in \mathcal{F}_n \, \forall n \geq 1$.

Exemple. dans la théorie des nombres réels, les constantes sont des éléments de $\mathbb{R}$. les variables $x, y, \ldots,$ les fonctions telles que $\cos, \sin, +, \times, \ldots$ sont réelles.

$*$ $\sin x$ est un terme.

$*$ $.xx$ est un terme représenté habituelle par x^2.

$*$ $+xy$ est un terme représenté habituelle par $x + y$.

$*$ L'expression $\sin(x + \sin(y^2 + x))$ est représentée par le terme : $\sin + x \sin + x.yy$

Remarque. En tant que mot, chaque terme à une écriture unique.

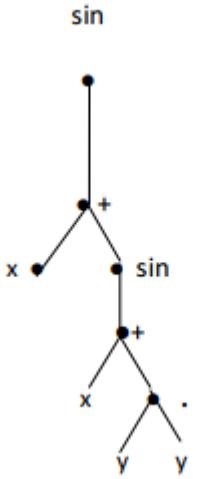
3.1.2.1 hauteur d'un terme

Soit $T = \bigcup_{n\geq 0} T_n$ *avec* $T_0 = v \cup \mathcal{C}$ et $T_{n+1} = T_n \cup \{ft_1, ..., t_k,\ f \in \mathcal{F}_k$ *et* $t_1, ..., t_k \in T_n\}$
$h(t) = min\{n/t \in T_n\}$

$*$ On peut aussi parler de l'arbre de décomposition d'un terme. Le hauteur d'un terme reale hauteur de son arbre de décomposition :

Exemple. Le terme : $\sin + x \sin + x.yy$

$h = 5$



3.1.3 Formule

Une formule atonique est un mot de A^* qui sont $R\,t_1...t_n$ avec R une relation d'arité n $(R \in \mathcal{R}_n)$ et $t_1....t_n$ sont des termes (par exemple on écrit $= t_1t_2$ pour $t_1 = t_2$).

Définition3.4 L'ensemble des formules du 1^{er} ordre est la plus petite partie $\mathcal{F}$ de $A^*/$

1) Toute formule atonique $\in \mathcal{F}$.

2) $F, G, \in \mathcal{F} \Rightarrow \rceil F, (F \wedge G), (F \vee G), (F \Rightarrow G), (F \Leftrightarrow G) \in \mathcal{F}$

3) $F, \in \mathcal{F} \Rightarrow \forall\, v_n\, F$ et $\exists\, v_n\, F \in \mathcal{F}, \forall\, n.$

Remarque.

1) On a On a $\mathcal{F} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ avec $\mathcal{F}_0$ = formules et ou. avec $\mathcal{F}_0$ = formules et ou.,
$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F} \cup \{\rceil F, F \in \mathcal{F}\} \cup \{(F * G), F, G \in \mathcal{F}_n, * =\} \cup \{\forall v_k F, F \in \mathcal{F}_n, k \in \mathcal{N}\} \cup \{\exists v_k F, F \in \mathcal{F} \; et \; h(F) = min\{n/ F \in \mathcal{F}_n\}$.

2) En tant que mot, toute formule a une écriture une unique.

3) Une formule a aussi son arbre de décomposition de les terminaisons sont les formule atoniques.

Exemple. Soit la signature $\sum = \{p, Q, R, f, g, T\}$

$*\forall x\,(Rxy \Rightarrow Qxfy)$.

$*\rceil \exists x(Rxy \vee Qxgyx)$.

$*\forall x\,(px \wedge \exists y(Tyx \Rightarrow sxy))$ sont des formules.

Les sous formules de F se définissent de la façon suivant : $*$ Si F est atonique alors $sf(F) = \{F\}$.

$*F = \rceil G$, $sf(F) = \{F\} \cup sf\{G\}$.

$*$ Si $F = (G_1 * G_2)$, $sf(F) \cup sf\{G_1\} \cup sf\{G_2\}$.

$*$ Si $F = \forall x_k G$, $sf(F) = \{F\} \cup sf(G)$.

$F = \exists x_k G$.

3.2 Variable libre et Variable lieé

Une variable v_n peut apparaitre plusieurs fois dans une formule F. On dit quelle a plusieurs occurrences. Ces apparitions sont de deux sorts : libre et liées.

Définition3.5 On définit par indication les occurence libre de v_n :

$\star$ Si F est atonique, toute les occurrences de v_n dans F sont libres.

$\star$ Si $F = \rceil G$, les occurrences libres de v_n dans F sont celle de v_n dans G.

$\star$ Si $F = (G\,\alpha\,H)$, les occurrences libres de v_n dans F sous sont celles de v_n dans G et celles de v_n dans H.

$\star$ Si $F = \forall v_k G$ ou $F = \exists v_k G$ avec $k \neq n$, les occurrences libres de v_n dans F sont

celle de v_n dans G.

$\star$ Si on dit alors que x_n est quantifiée dans F $F = \forall v_n G$ ou $F = \exists v_n G$ aucune occurrence de v_n dans F n'est libre.

Exemple. $\sum = \{R, c, f\}$

R : Relation, c : constante, f : fonction

$F = \forall x_0(\exists x_1 \forall x_0(Rx_1x_0 \Rightarrow \rceil x_0 \simeq x_3) \wedge \forall x_2(\exists x_2(Rx_1x_2 \vee fx_0 \simeq c) \wedge x_2 \simeq x_2)$

Toute les occurrences de x_0 et de x_2 sont liées les deux premier occurrences de x_1 sont liées le troisième est libre. x_3 est libre.

Définition3.6 Une variable dans F est libre si elle a au moins une occurrence libre. Une formule close est une formule sans variables libre dans l'exemple précédent F n'est pas close ($(x_1 et\, x_3)$sont libres).Une clôture une variable de F est une formule de la forme $\forall v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n} F$ ou $v_{i_1}, ..., v_{i_n}$ sont les variables libre de F une clôture inversible est close.

3.2.1 Portée d'un quantificateur

Posons $\ominus = \exists$ ou $\forall$. Dans toute formule F contenant Ox, le mot Ox, est suit d'une sous-formule unique G dans laquelle sous le Ox, le variable x soit libre.

Définition3.7 G le portée du quantificateur O les occurrences de x sont qui sont dans le champ de O sont les occurrences libres de x dans G.

Exemple : $F = \exists x((px \vee \underset{8}{Qy} \wedge \underset{12}{gy} = z) \Rightarrow (\exists x \forall^{\swarrow 21} \underset{22}{y}\, \underset{25}{Rxy} \wedge fxz =) y$ libre $8 et\, 12$, liée en 22 et 25 quantifiée en 22 et 25 quantifiée en 22 et 25dans le champ du 21.

3.2.2 Substitution dans les formules

3.2.2.1 Notation

$t = t[x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}]$ signifie que les variables ayant au mois une occurrence dans le terme t sont permit $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$. Si $m = \underset{j}{max}\, x_j$ on peut aussi écrit $t = t[x_0, x_1, ..., x_m]$.

Définition3.8 Soient $y_1, ..., y_k$ des variables et t, $u_1, ..., u_k$ des termes. Le mot $t\frac{u_1}{x_1},...,\frac{u_k}{x_k}$ est le mot obtenu par substitution des termes $u_1, u_2, ..., u_k$ aux variables $y_1, ..., y_k$ dans toute les occurrences des $y_i\, dans\, t.$ plus exactement :

$\star t = $ constante ou variable $\neq y_i$ alors $t\frac{u_1}{y_1},...,\frac{u_k}{y_k} = t.$

$\star t = y_i\,(1 \leq i \leq k)\, t\frac{u_1}{y_1},...,\frac{u_k}{y_k} = u_i.$

$\star t = ft_1t_2...t_n\ t\frac{u_1}{y_1},...,\frac{u_k}{y_k} = ft_1\frac{u_1}{y_1},...,\frac{u_k}{y_k}....t_n\frac{u_1}{y_1},...,\frac{u_k}{y_k}$

Proposition3.1 $t\frac{u_1}{y_1},...,\frac{u_k}{y_k}$ est un terme.

Preuve. Par induction sur le terme t.

3.2.3 Substitution dans les formules

3.2.3.1 Notation

$F = F[x_{i_1}, ..., x_{i_n}]$ veut dire que les variable libres dans F se trouvent parmi les x_{i_1}. On va substituer des termes à des variables libres dans une formules.

Définition3.9 Soient F une formule, $y_1, ..., y_k$ des termes. Le mot $F\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k}$ obtenu par substitution des termes $u_1, ..., u_k$ aux variable $y_1, ..., y_k$ et défini comme suit:

$\star Si\ F = Rt_1....t_n$ est atonique alors $F\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k} = Rt_1\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k}.....t_n\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k}.$

$\star Si\ F = \rceil\, G$ alors $F\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k} = \rceil\, G\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k}.$

$\star Si\ F = (G\,\alpha\, H),\ F\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k} = (G\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k}\,\alpha\, H\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k}).$

$\star Si\ F = OxG\,(x \neq y_i),\ F\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k} = OxG\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k},\ O = \exists\ ou\ \forall.$

$\star\ Si\, F = Oy_iG\,(i = 1, 2, ..., k),\ F\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_k}{y_k} = Oy_iG\frac{u_1}{y_1}...\frac{u_{i-1}}{y_{i-1}},\frac{u_{i+1}}{y_{i+1}}...\frac{u_k}{y_k}$

Exemple. $F = \forall\, x_0(\exists\, x_1 \forall\, x_0(Rx_1x_0 \Rightarrow \rceil\, x_0 = x_3) \wedge \forall\, x_2(\exists\, x_2(Rx_1x_2 \vee fx_0 = c) \wedge v_2 = v_2))$

$t = ffc$

$F\frac{t}{x_1} = \forall\, x_0(\exists x_1\, \forall x_0(Rx_1x_0 \Rightarrow \rceil\, x_0 = x_3) \wedge \forall x_2(\exists x_2(\exists x_2(Rffcx_0 \vee fx_0 = c) \wedge x_2 = x_0))$

3.3 Sémantique du calcul des prédicats

Nous volons donner des valeurs de vérité aux formules du calcules des prédicats pour cela il faut spècifier un domaine dans lequel les variables prennent des valeurs et ou les symboles de relation et de fonction aient un sens .

Exemple1. Soit la formule $\exists y \forall x\, Ryx$ pour donner une valeur de vérité à cette formule il faut donner des valeurs aux variables x, y et préciser la définition de la "ralation" R.

Cela dépend donc de l'ensemble dans lequel les variables x, y prennent leurs valeur et de la définition de R dans cet ensemble.

⋆ Si $R = \leqslant$ sur $\mathbb{N}$, alors la formule et vraie.

⋆ Si $R = <$ sur $\mathbb{N}$, la formule et fausse.

⋆ Si $R = \leqslant$ ou $<$ sur $\mathbb{Z}$, la formule et fausse.

On a donc besoin de spécifier un ensemble dans lequel les variables prennent des valeurs et dans lequel les symboles de relations et de fonctions deviennent des vraies relations et fonctions. Cet ensemble sera une structure (ou une réalisation du langage ou alphabet A du calcule des prédicats considère)

Exemple2. Rcx

⋆ Vraie pour $\mathbb{N}$, $c = 0$, $x = 1$, $R = \leqslant$.

⋆ fausse pour $\mathbb{N}$, $c = 0$, $x = -1$, $R = \leqslant$.

3.3.1 Définition d'une structure

Soit A un alphabet du 1^{er} ordre.

Définition3.10 Une A structure est la donnée d'un ensemble S tel que :

⋆ Toute constante c de A est associée à un élément $\bar{c}$ de S.

⋆ Chaque symbole de fonction f d'arité n est associée une application $\bar{f} : S^n \longrightarrow S$.

⋆ Chaque symbole de relation R d'arité n est associée une relation $\bar{R}$ d'arité n sur S ($\bar{R} \subseteq S^n$) (la relation d'égalité correspondant à l'égalité dans S).

Soit le langage de signature $\sum = \{R, f, c_0, c_1\}$ une structure possible est $S = \mathbb{N}$, $\bar{R} = \leqslant$, $\bar{f} = +$, $\bar{c_0} = 0$, $\bar{c_1} = 1$. Une auto structure possible est $S = \mathbb{R}$, $\bar{R} =<$, $\bar{f} = x$, $\bar{c_0} = e$, $\bar{c_0} = T$

Remarque. Quand on considère plusieurs structures associées au même langage, pour chaque structure, on peut écrire $\bar{c_s}$, $\bar{f_s}$, et $\bar{R_s}$, où $\bar{c_s}$ représente l'interprétation des symboles constants, $\bar{f_s}$ représente l'interprétation des symboles de fonction, et $\bar{R_s}$ représente l'interprétation des prédicats.

Définition3.11 Soient S et S' deux structure du même langage (alphabet). On dit que S est une sous-structure de S' si :

$\star S \subseteq S'$.

$\star \bar{c_s} = \bar{c_{s'}}$ pour toute constante c.

$\star \bar{f_s} = \bar{f}_{\frac{s'}{s^n}}$ pour toute f d'arité n.

$\star \bar{R_s} = \bar{R_{s'}} \cap S^n$ pour toute relation R d'arité n.

Exemple. $\sum = \{R, f, g, c_0, c_1\}$

$\star S' = \mathbb{Z}$, $\bar{R_{s'}} =\leqslant$, $\bar{f_{s'}} = +$, $\bar{g_{s'}} = +$, $\bar{c_{0_{s'}}} = 0$, $\bar{c_{1_{s'}}} = 1$

$\star S = \mathbb{N}$, $\bar{R_s} =\leqslant$, $\bar{f_s} = +$, $\bar{g_s} = +$, $\bar{c_{0_s}} = 0$, $\bar{c_{1_s}}$

Soient toujours S *et* S' deux structures du même alphabet. Un morphisme de structure entre S *et* S' est une application $\varnothing : S \longrightarrow S'$.

$\star \varnothing (\bar{c_s}) = \bar{c_s}, \forall c$

$\star \varnothing (\bar{f}_{a_1,...,a_n}) = \bar{f_{s'}} (\varnothing(a_1), ..., \varnothing(a_n)$

pour toute f d'arité n, $\forall a_i \in s \star (a_1), ..., a_n) \in \bar{R_s^n} \Rightarrow (\varnothing(a_1), ..., \varnothing(a_n) \in \bar{R_{s'}^n}$

$\forall a_1, ..., a_n \in S, \forall R$ d'arité n

Exemple. $\sum = \{f, c\}$

$S =< \mathbb{R}_+^*, 1, x >$; $S' =< \mathbb{R}, 0, + >$

$$\varnothing : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto logx$$

Définition3.12 Un morphisme de structures $\varnothing : S \longrightarrow S'$ est un monomorphisme . Si pour toute relation R d'arité n, si $a_1, ..., a_n \in S$ alors $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \bar{R}_s \Leftrightarrow (\varnothing(a_1, ..., a_n)) \in \bar{R}_s$

Exemple. Tout sous-structure définit un monomorphisme (toute injection $S \circlearrowleft S'$) l'inverse est aussi vraie

Proposition3.2 Tout monomorphisme est injectif.

Preuve. Parmi les symboles la relation, on a la relation d'égalité =, elle définit sur S et S' la relation d'égalité des ensembles :"=S"="=s","==", donc soient

$a_1, a_2 \in S / \varnothing(a_1) = \varnothing(a_2)$, $\varnothing$ est un monomorphisme on a : $\varnothing(a_1) = \varnothing(a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$, donc $\varnothing$ est injective.

Définition3.13 Une isomorphisme de structure $\varnothing : S \longrightarrow S'$ est un monomorphisme surjectif en particulier $\varnothing$ doit être une bijection l'ensemble un automorphisme est un isomorphisme $\varnothing : S \longrightarrow S'$

Exemple. $S =< \mathbb{R}_+^*, 1, \times > et\, S' =< \mathbb{R}, 0, + >$.

$\varnothing : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto logx$ est une automorphisme.

L'étape suivante est l'interprétation des termes.

Définition3.14 Soient $t = t[x_0, ..., x_{n-1}]$ un terme et S une structure du logique du premier ordre. Soient $a_0, ..., a_{n-1}$ un élément de S.

L'interprétation $\bar{t_s}$ de t dans S quant $x_i = a_i$, $0 \leqslant i \leqslant n$ est défini de façon suivante :

$\star$ $Si\ t = x_i\ alors\ \bar{t_s} = a_i$.

$\star$ $t = c\ alors\ \bar{t_s} = \bar{c_s}$.

$\star$ $t = ft_1t_2...t_k\ alors\ \bar{t_s} = \bar{f_s}(\bar{t_{1_s}}, ..., \bar{t_{k_s}})$.

Exemple. $\sum = \{f, g, c_0, c_1\}$.

$S = \mathbb{N}$, $\bar{f} = +$, $\bar{g} = \times$, $\bar{c_0} = 0$, $\bar{c_1} = 1$.

$t = gyfxc_1 = t[x, y]$

$$\begin{pmatrix} x = x_0 \\ y = x_1 \end{pmatrix}$$

On prend $a_0 = 2$, $a_1 = 3$.

$\bar{t_s} = \bar{g}(3, \bar{f}(2,1)) = 3.(2+1) = 3 \times 3 = 9$

Proposition3.3 Soient $t = t[x_0, ..., x_{n-1}]$ et $t' = t'[y, x_0, ..., x_{n-1}]$ deux termes et $a_0, ..., a_{n-1}$ des éléments de la structure S. Alors on a $\bar{u_s} = \bar{t'_s}$, avec $u = t'_{\frac{t}{y}}$ et $y \rightsquigarrow \bar{t_s} = b \in S$

Preuve. Par indication sur le terme t'

$$\star t' = c, u = t' = c$$

$$\bar{u_s} = \bar{c_s} = \bar{t'_s}$$

$$\star t' = x_i, u = t' = x_i$$

$$\bar{u_s} = a_i = \bar{t'_s}$$

$$\star t' = y, u = t$$

$$\bar{u_s} = \bar{t_s} = \bar{t'_s}$$

$$\star t' = ft_1...t_k \ alors \ u = fu_1...u_k \ avec \ u_i = t_{i\frac{t}{y}}$$

Par l'hypothèse $\bar{u_{i_s}} = \bar{t_{i_s}}$

Donc : $\bar{u_s} = \bar{f}(\bar{u_{1_s}}, ..., \bar{u_{k_s}}) = f(\bar{t_{1_s}}, ..., \bar{t_{k_s}}) = \bar{u_{t'_s}}$

3.3.2 Satisfaction d'une formule dans une structure

Soit A un alphabet du 1^{er} ordre et S une A structure. Soit $F = F[x_0, ..., x_{n-1}]$ une formule (cette notation veut dire que les variables libres de F sont parmi les x_i).

On a défini la satisfaction d'une formule F dans S quand les variables x_i sont inter pend par les éléments a_0, a_1, ..., a_n de S.

Ce qu'on écrira :

$$S \vDash F[a_0, a_1, ..., a_{n-1}]$$

Définition3.15 $\star$ Si F est la formule atonique $Rt_1t_2...t_k$ avec $t_i = t_i[x_0, ..., x_{n-1}]$ alors

$$S \vDash F[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow (\bar{t_{1s}}, ..., \bar{t_{ks}}) \in \bar{R_s}$$

$\star$ *Si* $F = \urcorner G$

$S \vDash F[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow S \nvDash G[a_0, ..., a_{n-1}]$

$\star$ *Si* $F = (G \wedge H)$ alors

$S \vDash F \Leftrightarrow S \vDash G$ *et* $S \vDash H$

$\star$ *Si* $F = (G \Rightarrow H)$ alors

$S \vDash F \Leftrightarrow S \nvDash G$ *ou* $S \vDash H$

$\star$ *Si* $F = (G \vee H)$ alors

$S \vDash F \Leftrightarrow S \vDash G$ *ou* $S \vDash H$

$\star$ *Si* $F = (G \Leftrightarrow H)$ alors

$S \vDash F \Leftrightarrow (S \vDash G$ *et* $S \vDash H)$ *ou* $(S \nvDash G$ *et* $S \vDash H)$

$\star$ *Si* $F = \forall x G\,(x \neq x_i)$

$S \vDash F\,[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow S \vDash G[a, a_0, ..., a_{n-1}] \forall a$ avec x interprété par a

$\star$ *Si* $F = \exists x G\,(x \neq x_i)$

$S \vDash F[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow$ *si* $\exists a \in S/$

$S \vDash G[a, a_0, ..., a_{n-1}]$, *avec* $x \rightsquigarrow a$

$\star$ *Si* $F = \forall x_i G$

$S \vDash F[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow S \vDash G[a_0, ..., a_{i-1}, x_i \to a, a_{i+1}, a_{n-1}] \forall a \in S$

$\star$ *Si* $F = \exists x_i G$

$S \vDash F[a_0, ..., a_{n-1}] \Leftrightarrow \exists a \in S/$

$S \vDash G[a_0, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, ..., a_{n-1}]$

Remarque. Si F est close (sans variable libres) on écrit $S \vDash F$, F est soit satisfaite dans S

Exemple. $\sum = \{\underset{\uparrow 2}{R}, \underset{\uparrow 1}{f}, c\}$ est le structure $S = \mathbb{R}$, $\bar{R}_s = \leqslant$, $\bar{f}_s = \cos$, $\bar{c}_s = \pi$

$\star$ $F = Rcx$ $(= Rt_1t_2)$

$$S \vDash F[a] \Leftrightarrow \bar{t_{1s}}, \bar{t_{2s}} \in \bar{R}_s$$
$$\Leftrightarrow \bar{t_{1s}} \leqslant \bar{t_{2s}}$$
$$\Leftrightarrow \pi \leqslant a$$

donc : $S \vDash F[a] \Leftrightarrow a \in [\pi, +\infty[$

$\star F = \text{“}fx_0 = c\text{“} = cfx_0$

$S \vDash F[a] \Leftrightarrow \bar{c_s} = fx_{0_s} \Leftrightarrow \pi = \cos a$

donc : $\forall a \in R,\ S \nvDash F[a]$

$\exists x_1 \underbrace{fx_1}_{G} = x_0$, variable libre x_0.

$$S \vDash F[a_0] \Leftrightarrow S \vDash G[a_0, a_1] \text{ pour un certaine } a_1$$
$$\Leftrightarrow \exists a_1 \,/\, \cos a_1 = a_0$$
$$\Leftrightarrow a_0 \in [-1, 1]$$

$\star \forall x_1 \underbrace{Rx_0 fx_1}_{G}$, variable libre x_0

$$S \vDash F[a_0] \Leftrightarrow S \vDash G[a_0, a_1] \,/ \forall a_1$$
$$\Leftrightarrow \forall a_1 / a_0 \leqslant \cos a_1$$
$$\Leftrightarrow a_0 \in]\infty, -1]$$

$\star \forall x_1 \underbrace{\exists x_2 (Rx_1x_2 \wedge fx_2 = x_0)}_{G}$, variable libre x_0

$$S \vDash F[a_0] \Leftrightarrow \forall a_1 \exists a_2 \,/ S \vDash G[a_0, a_1, a_2]$$
$$\Leftrightarrow \forall a_1 / \exists a_2 / a_1 \leqslant a_2 \text{ et } a_0 = \cos a_2$$
$$\Leftrightarrow a_0 \in [-1, 1]$$

$\star x_0 \exists x_1 \underbrace{fx_1 = x_0}_{G}$ formule close

$\forall a_0, \exists a_1 / \cos a_1 = a_0 \qquad S \vDash F$

$\star \exists x_1 \forall x_2 \underset{G}{Rfx_2x_1}$ formule close

$\exists a_1 / \forall a_2, \cos a_2 \leqslant a_1 \qquad S \vDash F$

Proposition3.4 Soit $t = t[x_0, ..., x_{n-1}]$ un terme et $F = F[z, x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1}]$ une formule telle que aucune occurrence de z ne se trouve dans le champ de $\forall x_i$ *ou* $\exists x_i$. Alors pour toute structure S et $\forall a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1} \in S$ on a :

$S \vDash F_{\frac{t}{z}}[a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}] \Leftrightarrow S \vDash F[\bar{t_s}, a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]$

Preuve. Par récurrence sur la formule F

$\star F = Rt_1t_2...t_k \qquad t_i = t_i[z, x_0, ..., x_{n-1}, y_0, ..., y_{m-1}]$

$F_{\frac{t}{z}} = Rt_{1\,\frac{t}{z}}...t_{k\,\frac{t}{z}} = Rr_1...r_k$

$S \vDash F_{\frac{t}{z}} \Leftrightarrow (\bar{r_{1_s}}, ..., \bar{r_{k_s}}) \in \bar{R_s}$

Posons : $c_i = \bar{t_{i_s}}[\bar{t}, a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]$

On $\bar{r_{i_s}} = c_i$ donc $S \vDash F_{\frac{t}{z}} \Leftrightarrow (\bar{t_{i_s}}[\bar{t_s}, a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]) \in \bar{R_s}$, $i = 1, .., k \Leftrightarrow S \vDash F[\bar{t_s}, a_0, ..., a_{n-1}, b_0, ..., b_{m-1}]$

3.3.2.1 Conséquence et équivalence universelle

Soit A un alphabet du 1^{er} ordre :

$\star$ Une formule F close est universellement valide si $S \vDash F$ pour toute A structure S.

On note $\vDash F$

$\star$ Une formule close F est contradictoire ssi $\urcorner F$ est universellement valide.

$\star$ Une formule F comportant des variables libres est universellement valide si sa clotûre universelle l'est.

$\star F$ est universellement équivalente à G $(F \sim G)$ ssi $(F \Leftrightarrow G)$ est universellement valide.

$\star$ Une théorie T de A est un ensemble de formule close.

$\star$ Le structure S est un module de la théorie T si et seulement si $S \vDash F, \forall F \in T$ (on dit aussi que S et T) on note $S \vDash T$ $\star$ Une théorie T est consistante si elle admet au moins un modèle sinon elle est contradictoire $\star$ Une théorie finement consistante est une théorie dans laquelle toute partie finie est consistante.

$\star F$ close est conséquence de T si tout modèle de T satisfait F on note $T \vDash F$

(Si F est non close, considère le clôture universelle)

$\star T_1$ est équivalente à T_2 ssi toute modèle de T_1 est un modèle de T_2 et uni-versement.

Proposition3.5

1) *Si* $F \sim F'$ *et* $G \sim G'$ *alors* $\urcorner F \sim \urcorner F'$ $(F \,\alpha\, G) \sim (F' \,\alpha\, G')$ $\alpha = \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

$\forall x\, F \sim \forall x\, F'$

$\exists x\, F \sim \exists x\, F'$

2) Soit F une formule, G une sous-formule de F et $G' \sim G$, alors $F' = F_{\frac{G'}{G}} \sim F$.

Preuve.

1) Traitons la close $\forall$ il faut montrer que la clôture de $(\forall x\, F \Leftrightarrow \forall x\, F')$ est satisfait dans toute structure S écrivons

$$F = F[x_0, ..., x_{n-1}, x]$$

$$F' = F'[x_0, ..., x_{n-1}, x]$$

$x \longrightarrow a$

$$\begin{aligned} S \vDash \forall x\, F[a_0, ..., a_{n-1}] &\Leftrightarrow \forall a\, S \vDash F[a_0, ..., a_{n-1}, a] \\ &\Leftrightarrow \forall a\, S \vDash F'[a_0, ..., a_{n-1}, a] \\ &\Leftrightarrow S \vDash \forall x\, F'[a_0, ..., a_{n-1}] \\ &\Leftrightarrow S \vDash (\forall x\, F \Leftrightarrow \forall x\, F') \end{aligned}$$

2) Par induction sur la formule F.

Exemple.

$$\left.\begin{array}{c} \rceil \forall x\, F \sim \exists x \rceil F \\ \forall x(F \wedge G) \sim (\forall x\ F \wedge \forall x\, G) \\ \exists x(F \vee G) \sim (\exists x\ F \vee \exists x\, G) \\ \exists x(F \Rightarrow G) \sim (\forall x\ F \Rightarrow \exists x\, G) \\ \forall x \forall y\, F \sim \forall y \forall x\, F \\ \exists x \exists y\, F \sim \exists y \exists x\, F \end{array}\right\} Formule\ \ e^{'}quivalents$$

$$\left.\begin{array}{c} \exists x(F \wedge G) \Rightarrow (\exists x\ F \wedge \exists x\, G) \\ (\forall x\, F \vee \forall x\, G) \Rightarrow \forall x(F \vee G) \\ \exists x \forall y\, F \Rightarrow \forall y \exists x\, F \end{array}\right\} Formule\ \ universelle\ \ valide$$

Si x n'est pas libre dans F, on a : $\forall x\, F \sim \exists x\, F \sim F$

Corolaire. Toute formule du 1^{er} ordre est équivalente à une formule un comportant que $\rceil$, $\wedge$, $\vee$

Preuve. $\{\rceil, \vee\}$ est complet pour les connecteurs logique et $\exists$ s'exprime en-terme de $\rceil$ et $\forall$.

Chapter 4

Axiomatique de Z F et AC

4.1 Paradoxes, théorie naïve des ensembles

L'idée de base de la théorie najve est un concept très puissant, celui. d'ensemble. Un ensemble est une collection d'objets, qui peuvent être eux des ensembles. Ces objets sont dits éléments de l'ensemble. (on peut distinguer un élément d'un autre par ses propriétés, qui sont des assertions qui seront vraies pour certains éléments et fausses pour d'autres. Deux ensembles "naifs" sont très intuitifs : l'ensemble vide et jensemble Oméga Ω de tous les ensembles. Malheureusement, le concept naif d'ensemble s'avère etire trop ,ilssant. II peut conduire à des paradoxes. Le plus important de ces jadoxes est basé sur un théorème dérnontré par George Cantor en 19, qui stipule que l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E st toujours plus gros que E lui même; cela signifie que les éléments de $P(E)$ ne peuvent être mis en correspondance biunivoque avec ceux densemble E.

Par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$, ensemble qui contient trois élèments,

$$\mathcal{P}(E) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

possede huit éléments et on a $8 > 3$. De même pour un ensemble E afni, $\mathcal{P}(E)$ est plus gros que E car on ne peut établir de correspondance biunivoque entre les éléments de E et celui de $P(E)$. On dit que E et $\mathcal{P}(E)$ n'ont pas la même puissance. Le paradoxe survient lorsqu'on considère l'ensemble oméga de tous les ensembles : lẹ théorème de Cantor nous dit que $\mathcal{P}$ (omega) est un ensemble $\mathrm{pl}_{\mathrm{lus}}\,\mathrm{gr}_{\mathrm{oros}}$ qu'oméga, qui est pourtant censé contenir tous les ensembles! Voici

maintenant quelques autres paradoxes (ou antinomies) classiques:

4.1.1 Paradoxe de Russel

Le paradoxe de Russell, est un paradoxe très simple de la théorie des ensembles (Russell lui- un rôle important dans la formes, en un sens équivalent), qui a joue war Bertrand Russell ves 1001 formatisation de celle-ci. Il fut découvert par Bu à Göttingen, où il avait et publié en 1903. Il était en fait déja connt Zermelo, à la mêm vert indépendamment par Enst Zermelo, à la même époque, mais ce dernier ne l'a pas publié.

4.1.1.1 Énoncé du paradoxe

On peut formuler le paradoxe ainsi : l'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même? Si on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction à nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend l'existence d'un tel ensemble paradoxale.

Réécrit plus formellement, si l'on pose : $y = \{x \mid x \notin x\}$ on a immédiatement que $y \in y \Leftrightarrow y \notin y$, donc chacune des deux possibilités, $y \in y$ et $y \notin y$, mène à une contradiction.

4.1.1.2 Solutions du paradoxe

Les principales solutions apportées pour étudier ce paradoxe furent :

1. Restriction du principe de compréhension, due à Zer- melo (1908) :

> Un prédicat ne définit pas un ensemble mais ce que l'on appelle une classe et son intersection avec un ensemble donne un sous-ensemble de celui-ci. Il est possible d'écrire le prédicat " $x \notin x$", mais celui-ci ne définit plus un ensemble. Il peut définir un sous-ensemble d'un ensemble donné, mais cela ne conduit pas a cessaire, pour développor les mathé à un paradoxe. Il est néoper les mathématiques, d'introduire un certain nombre d'autres instances du principe de comprehenaion gentrale comme axiomes particuliers

(paire, reunion, enambble des partics, ...). Plus tard Abraham Fraenkel et Thoralf Skolem introcluisirent. (incte pendamment) le schema d'axiomes de remplacement, qui eat toujours une restriction du principe de comprehension general, mais ctencl encore le schéma d'axiomes de compréhension introduit par Zermeln. Jla precisèrent également la notion de predicat, et, en particmlier Sknlem, le contexte logique (le calcul des prédicats du premier ordre).

2. Théorie des types de Russell:

Esquissée en appendice de l'ouvrage déjà cité de 1903, Russell la. développe véritablement dans un article de 1908 (voir références). II poursuivit, en compagnie de Whitehead, avec les Principia Mathernatica parus en 1910. Selon cette théorie, les ensembles sont de types hiérarchisés. A un ensemble ne peuvent appartenir que des objets, qui peuvent etre des ensembles, mais sont de types strictement inférieurs au type de l'ensemble initial, de sorte qu'on ne peut tout simplement plus écrire l'énoncé paradoxal (on ne peut plus écrire le prédicat d'auto-appartenance " $x \in x$ ", à fortiori sa négation). Russell n'a pas immédiatement développé la théorie des types après 1903. II a d'abord pensé à des solutions alternatives, comme la théorie « pas de classe », qu'il tente d'esquisser dans son article de 1906. Dans ce même article, Russell ne cite d'ailleurs même pas la théorie des types parmi les solutions qu'il a explorées.

4.1.2 Paradoxe du coiffeur (barbier)

Le paradone du barbier est une illustration à but didactique du paradoxe de Russell, attribuge a Bertrand Russell hui-meme. Il ne faut donc pas donner une importance excessive à ce "paradoxe" "que le logicien E. W. Beth qualifie "d'antinomie prétendue" ou de "pseudoantinomie".

4.1.2.1 Énoncé du paradoxe

On peut énoncer le paradoxe ainsi :

Le conseil municipal d'un village axrete une ordonnance qui enjoint a son barbier (masculin) de raser tous los habitants masculins du village qui ne se rasent pas eux-memes et soulernent

ceux-ci.

Le barbier, qui est bien un habitant du village, n'a pas pu respecter cette règle car :

- S'il se rase lui-même, il enfreint la règle, car le barbier ne pet raser que les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.

- S'il ne se rase pas lui-même - qu'il se fasse raser ou qu'il conserve la barbe - il est en tort également, car il a la charge de raser les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Cette règle est donc inapplicable. S'agit-il pour autant d'un paradoxe? Il n'y a aucune raison de penser qu'un conseil de village on toute autre instance ne puisse rendre une ordonnance absurcle. De fait, loin d'être une antinomie logique, ce "paradoxe" montre simplement qu'un barbier respectant cette règle ne peut exister. Il s'agit d'une illustration de ce que, si R est une relation binaire quelconque (en l'occurrence " ...rase..."), l'énoncé suivant, écrit en langage formel : $\neg\exists y\forall x(yRx \Leftrightarrow \neg xRx)$, est une formule universellement valide du calcul des prédicats du premier ordre. On se reportera à l'article sur le paradoxe de Russell pour voir pourquoi cela peut conduire, dans le cas de la relation d'appartenance dans une théorie des ensembles trop naïve, à une véritable antinomie, c'est-à-dire à une contradiction démontrée dans la théorie.

4.1.3 Paradoxe du menteur

Le paradoxe du menteur est un paradoxe dérivé du paradoxe du Crétois (ou paradoxe d'Épiménide). Ce paradoxe aurait été inventé par Euclide, un adversaire d'Aristote. Sous sa forme la plus concise, il s'énonce ainsi : "un homme déclare : Je mens. Si c'est vrai, c'est faux. Si c'est faux, c'est vrai". On peut y voir deux interprétations :

- En tant qu'énoncé, cette phrase dit : "Cette phrase est fausse";

- En tant que propos, il faut comprendre : "Je mens maintenant".

4.1.3.1 Énoncé du paradoxe

On attribue le paradoxe du menteur à Épiménide le Crétois (VIIe siècle av. J.-C.), bien qu'il semblerait que cette première formulation du paradoxe du menteur ne soit apparue paradoxale

que bien plus tard ; lorsqu'au IVe siècle av. J.-C., Euclide de Milet énonça : "Un homme disait qu'il était en train de mentir. Ce que l'homme disait est-il vrai ou faux?".

On pourrait allonger ce paradoxe par cet énoncé : "La phrase suivante est fausse. La phrase précédente est vraie".

Attribuons à Épiménide le propos : "Tous les Crétois sont des menteurs " Ceci était considéré par les phìlosophes antiques comme un paradoxe puisqu'il échappait au principe de non-contradiction, En effet, soit Épiménide dit vrai, alors il ment(puisque c'est um Crétois), donc son affirmation est fausse (puisque tous les Crétois mentent). soit ,au contraire, Epiménide ment en disant cela , alors il existe au moins un Crétois qui dit la vérité, et donc son affirmation est fausse. Dans tous les cas, Son affirmation est fausse, ce qui n' est pas contradictoire ; c'est la solution du paradoxe.

4.1.3.2 Solution du paradoxe

Aristote semble faire allusion à ce paradoxe dans "les Réfutations sophistiques" et donne cette solution : on peut mentir en général, tout en disant la vérité sur un point particuhier. La contradiction disparaît dès lors qu'on comprend la proposition ainsi :"je dis vrai en disant que je mens" : la vérité en question n'est plus alors absolue, mais relative à un contenu déterminé. Une ambiguité nait donc de la confusion entre le langage et le métalangage (celui qui parle du langage dans lequel il parle au moment où il parle).

Les interprètes modernes ont résolu ce paradoxe en l'étalant dans lispace. En effet, tout ce qu'on peut déduire de la citation d'Épiménide, c'est qu'elle est fausse; en particulier tous les Crétois ne sont pas des menteurs, mais Epménide, lui, en est un. On résout ainsi le paradoxe en létalant dans l'espace. Néanmoins la phrase, au présent, nécessiterait une analyse au même temps, avec toute linstantanéité nécessaire à la résolution de l'assertion d'Epiménide.

En fait, la négation de "Tous les Crétois sont des menteurs" n'est pas: "Tous les Crétois disent la vérité", mais : "l existe au moins un Crétois qui dit la vérité" (et il faudrait même dire, dans le sens où menteur est utilisé jusqu'ici, "Il existe au moins un Crétois qui dit parfois la vérité"). Donc, il peut exister un ou plusieurs menteurs crétois, mais il est vrai que celui-ci peut être Epiménide.

De manière analogue, le paradoxe "Je mens toujours" cesse de l'être lorsqu'on l'étale dans le temps : au moment où je dis "Je mens toujours" , je mens nécessairement (sinon, on a le même problème qu'avec Épiménide), ce qui implique que je ne mens pas toujours. il n'y pas de contradiction logique:il m'arrive de mentir, mais pas toujours!

Le paradoxe du menteur devient plus intéressant lorsqu'on en considère la version suivante : "Je mens en ce moment même". Si alors elle devient vraie!

Cela indique que quand une phrase peut se prendre elle-meme pour énoncé, cela peut conduire à une situation instable.

Cette phrase réalise une action du fait de son énonciation, c'est une contradiction performative. Autre exemple: "je suis mort" (si je parle c'est que je suis encore vivant).

4.1.4 Paradoxe de Cantor

Le paradoxe de Cantor, ou paradoxe du plus grand cardinal, est un paradoxe de la théorie des ensembles dont l'argument a été découvert par Georg Cantor dans les années 1890 (on le trouve dans une lettre à David Hilbert datée de 1897). II est appelé ainsi par Bertrand Russell dans ses "Principles of Mathematics" de 1903. Le paradoxe énonce que l'existence d'un plus grand cardinal conduit à une contradiction. Dans une théorie des ensembles trop naive, qui considèrerait que toute propriété définit un ensemble, ce paradoxe est bel et bien une antinomie, une contradiction déduite de la théorie, puisque le cardinal de la classe de tous les ensembles serait alors le plus grand cardinal Mais ce n'en est pas une pour Cantor, qui n'a d'ailleurs jamais parlé de paradoxe. Pour lui, cela montre que le plus grand cardinal, s'il peut d'une certaine façon se définir, n'est pas un ensemble : reformulé en termes modernes et dans une théorie des ensembles axiomatique que ne connaissait pas Cantor, la classe des cardinaux n'est pas un ensemble.

4.1.4.1 Énoncé du paradoxe

On peut déduire le paradoxe de deux façons. Pour toutes deux on utilise que tout ensemble a un cardinal et donc, implicitement, l'axiome du choix.

- On montre que la classe des cardinaux est equipotente a la classe des ordinaux, et donc le paradoxe de Cantor se rametne au parradoxe de Burali-Forti, il faut pour cela une forme du schemma d'axiomes de remplacement.

- On utilise le théorème de Cantor sur la cardinalité de l'ensemble des parties : si le plus grand cardinal est un ensemble, il a donc un ensemble des parties, qui a alors un cardinal strictement supérieur à ce plus grand cardinal.

4.1.4.2 Paradoxe de Cantor et paradoxe de Russell

Pour Cantor un peut éliminer tout appel à la notion de cardinal, et donc à l'axiome *du* choix dans le second raisonnement. Soit la classe de tous les ensembles (dont le cardinal serait naturellement le plus grand cardinal).

Pour Cantor tout ensemble pouvait être bien ordonné et avait un cardinal. Mais on peut éliminer tout appel à la notion de cardinal, et donc à l'axiome $_{du}$ choix dans le second raisonnement. Soit V la classe de tous les ensembles (dont le cardinal serait naturellement le plus grand cardinal). Si V est un ensemble, son ensemble des parties $\mathcal{P}(V)$ également. Donc $\mathcal{P}(V) \subset V$, l'identité définit une injection de $\mathcal{P}(V)$ dans V et contredit le théorème de Cantor. On a en fait montré que la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

ci a d'ailleurs déclaré qu'il était arrive paradoxe de Russell, et celui la preuve du théorème de Cantor. En adaptant la démonstration du théorème de Cantor à ce cas particulier, on construit une réciproque à gauche f de l'identité de $\mathcal{P}(V)$ dans V, et on considère l'ensemble $\{x \in V \mid x \notin f(x)\}$, dont l'intersection avec $\mathcal{P}(V)$ est $\{x \in \mathcal{P}(V) \mid x \notin x\}$.

Le paradoxe de Russell a l'avantage d'être plus simple et de ne pas faire appel à l'ensemble des parties d'un ensemble, la seule propriété ensembliste est la compréhension non restreinte, qu'il utilise une seule fois, et qui est exactement la raison du paradoxe. Le paradoxe de Cantor utilise aussi la compréhension non restreinte, d'une façon analogue au paradoxe de Russell qui n'est pas correcte dans les théories des ensembles usuelles à la ZFC, mais aussi quand il affirme que l'ensemble des parties d'un ensemble est un ensemble, ce qui est par contre licite (c'est l'axiome de l'ensemble des parties).

4.1.5 Paradoxe de Richard

Le paradoxe de Richard apparait dans une théorie des ensembles qui n'est pas suffisamment formalisée. Il a joué un rôle important dans les recherches sur les fondements des mathématiques, en particulier au début du XXe siècle, et a suscité depuis sa publication en 1905 de nombreux commentaires. Son auteur, le mathématicien français Jules Richard, professeur au lycée de Dijon, le décrivit dans une lettre au directeur de la Revue générale des Sciences Pures et Appliquées. Ce dernier décida de la publier, sous forme d'un court article, dans le numéro du 30 juin 1905 de cette revue.

4.1.5.1 Énoncé du paradoxe

Si l'on numérote tous les nombres réels définissables en un nombre fini de mots, alors on peut construire, en utilisant l'argument de la diagonale de Cantor un nombre réel hors de cette liste. Pourtant ce nombre a été défini en un nombre fini de mots.

Voici quelques détails sur la construction :

1. Les nombres réels définissables avec un nombre fini de mots forment, de ce fait même, un ensemble dénombrable, soit E.

2. On peut construire un réel N qui n'est pas dans E par le procédé de diagonalisation suivant : on numérote les éléments de E, puis, on choisit chaque chiffre de N de sorte que le n-ième chiffre de N soit différent du n-ième chiffre du n-ième élément, et que ce ne soit pas 9 (pour éviter la double écriture des décimaux). Ainsi, pour chaque n, l'élément numéro n diffère de N pour au moins un chiffre, donc n diffère bien de N (tous les réels, en dehors des décimaux, ont une écriture décimale unique).

3. Cependant, en décrivant ce procédé de construction, on a défini N en un nombre fini de mots : c'est une contradiction.

Ce paradoxe, qui se formule très simplement, comme le paradoxe de Russell, pose cependant un problème de nature différente, qui est celui du langage licite pour les énoncés mathématiques, comme le remarque Giuseppe Peano dès 1906. Comme le paradoxe de Russell, il joue un rôle

important dans la crise des fondements des mathématiques au début du XXe siècle, crise que voulut résoudre d'une façon définitive le programme de Hilbert. Il est mentionné par Kurt Gödel dans l'introduction de son article de 1931 sur les théorèmes d'incomplétude : quand il résume l'argument permettant de construire une proposition indécidable, il déclare que "L'analogie qui existe entre ce raisonnement et l'antinomie de Richard saute aux yeux". Il s'agit de la construction de l'énoncé indécidable, qui utilise bien un raisonnement diagonal et l'énumération des formules du langage, énumération qui doit cependant être effective dans la preuve du théorème de Gödel. L'énoncé que Gödel construit est inspiré lui du paradoxe du menteur, sous une forme - une proposition qui énonce d'elle-même qu'elle n'est pas démontrable (ou qu'elle est fausse, pour que ce soit vraiment le paradoxe du menteur) - qui pose le même genre de questions que le paradoxe de Richard

Le paradoxe de Richard eut également de nombreuses reformulations, notamment le paradoxe de Berry sur le plus petit entier non définissable en mou (100 ou n'importe quel nombre superieur au non ', illems d'utiliser pour définir cet entier), appelé d'ailleurs parfois également paradoxe de Richard.

4.1.5.2 Solution du paradoxe

Le plus souvent, on résout ce paradoxe en distinguant deux niveaux de langage, celui de la théorie que l'on décrit, appelé parfois langage objet, et le langage, le plus souvent non formalisé, que l'on utilise pour décrire cette théorie, le métalangage. Quand on définit l'ensemble dénombrable des réels définissables en un nombre fini de mots, ce ne peut être que dans un langage particulier. La description du réel N se fait en un nombre fini de mots dans le métalangage. Sa construction montre simplement qu'il ne peut se décrire en un nombre fini de mots dans le langage du départ. Pour pouvoir refléter le paradoxe dans le langage objet, il faudrait coder le métalangage dans le langage objet, comme le fait Gödel pour le paradoxe du menteur. Alors il n'y a plus de paradoxe.

Cette solution (distinguer deux niveaux de langage) n'était pas vraiment celle proposée par Richard dans son article. Pour lui, le paradoxe vient de la définition même de N qui invoque l'ensemble E, alors que celui-ci n'est pas encore complètement défini. Pour Richard,

quand on construit l'énumération, au moment où l'énoncé définissant N (et où donc la lettre E apparaît), est énuméré, il n'a pas encore de sens. C'est ce que Henri Poincaré, qui s'est beaucoup intéressé au paradoxe de Richard, a systématisé sous le nom de définitions "non prédicatives". Il voyait dans le refus de ces définitions la "vraie solution" aux paradoxes. On a depuis mis en évidence des théories non prédicatives cohérentes (non paradoxales), mais néanmoins la prédicativité reste un bon principe d'élaboration de théories cohérentes. Aussi la prédicativité est un principe souhaité par certains, comme Quine qui y voit une manière d'éviter un "engagement ontologique" qui n'a pas de sens sauf à soutenir la position philosophique qu'est le platonisme mathématique.

4.1.6 Paradoxe de Grelling

Le paradoxe de Grelling-Nelson est un paradoxe sémantique formulé en 1908 par Kurt Grelling et Leonard Nelson, et parfois attribué par erreur au philosophe et mathématicien allemand Hermann Weyl. Il est alors appelé paradoxe de Weyl, mais aussi paradoxe de Grelling.

4.1.6.1 Énoncé du paradoxe

Le paradoxe de Grelling peut être énoncé de la manière suivante: certains adjectifs décrivent des propriétés qui s'appliquent à eux-mêmes, tels que «polysyllabique», «français». De tels adjectifs peuvent être qualifiés d'autologiques. D'autres adjectifs, à l'inverse, décrivent des propriétés qui ne s'appliquent pas à eux-memes. Par exemple, «long», «monosyllabique». On peut qualifier de tels mots d'hétérologiques. Ceci conduit à classer les mots en deux catégories:

(a) autologiques;

(b) hétérologiques.

Une telle distinction conduit toutefois à un paradoxe. Compte tenu des définitions précédentes, le paradoxe apparaît en effet lorsqu'on s'interroge sur le statut du prédicat hétérologique lui-même. Ainsi, «hétérologique» est-il autologique ou bien hétérologique? Car si «hétérologique» est hétérologique, alors par définition, «hétérologique» est autologique. Et inversement, si

«hétérologique» est autologique, il en résulte qu'il est hétérologique. La conclusion est paradoxale, car il s'ensuit qu'«hétérologique» est hétérologique si et seulement s'il est autologique.

Le paradoxe provient de ce que si le mot hétérologique ne s'applique pas à lui-même, alors il est ainsi hétérologique tout en ne l'étant pas, et s'il s'applique à lui, il n'est alors pas hétérologique tout en l'étant. Les raisonnements qui conduisent au paradoxe de Grelling peuvent être présentées de façon plus détaillée de la manière suivante : On constate alors que la proposition $P(X) =\ll$ le mot X est hétérologique» est une proposition pour laquelle la valeur de A-vérité est indéfinie si X est le mot hétérologique. Mais on voit également que le mot hétérologique n'est pas non plus autologique. La proposition $P(X)$ admet donc trois plages de valeurs, dont l'une est indéfinie, quand X parcourt l'ensemble des mots de la langue.

4.1.6.2 Solution du paradoxe

Parmi les solutions qui ont été proposées pour résoudre le paradoxe de Grelling, l'une d'entre elles conduit à observer que la structure du paradoxe est très similaire à celle du paradoxe de Russell. Ainsi, les deux paradoxes présenteraient une structure commune et condion conduit, de même nature.

a rejeter les définitions de tous les prédicats qui présentent cucture auto-référentielle. Pourtant, une telle solution ne s'avere as non plus satisfaisante. En effet, elle apparaît beaucoup trop restrictive, car il s'avère que l'on parvient tout à fait valablement à déterminer le statut de nombreux prédicats auto-référentiels tels que par exemple polysyllabique. Proscrire purement et simplement tous les prédicats dont la structure est auto-référentielle serait payer urı prix beaucoup trop fort pour la seule élimination du paradoxe.

4.2 Axiomes de Zermelo-Fraenkel (ZF)

Nous allons parler de l'axiome du choix, spécifiquement en logique mathématique dans l'axiomatisation usuelle des ensembles appelée ZF (pour la théorie de Zermelo-Fraenkel). Nous allons donc dans un premier temps présenter cette axiomatisation et faire tous les rappels nécessaires à un énoncé précis de l'axiome du choix.

La théorie axiomatique de Zermelo-Fraenkel est une théorie fondée sur la logique du premier ordre avec identité, et un seul symbole non logique. Il s'agit d'une théorie axiomatique du premier ordre, construite sur le langage $\{2, =\}$. Les objets dont parle cette théorie, c'est-à-dire les éléments d'un modèle de ZF sont des ensembles : toute variable représente un ensemble et il n'existe pas d'autres types d'objets.

Voici les axiomes de la théorie ZF :

4.2.1 Axiome d'extentionalité

Deux ensembles sont identiques s'ils ont les mêmes éléments.

$$\forall A \forall B[(\forall x(x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)) \Rightarrow A = B]$$

Il stipule que si A et B sont deux ensembles ayant exactement les mêmes éléments, alors ils sont égaux; ainsi pour définir un ensemble A il suffira de définir ses éléments

4.2.2 Axiomes de construction

4.2.2.1 Axiome de la paire

$$\forall x \forall y \exists A \forall z((z \in A) \Leftrightarrow (z = x \vee z = y)).$$

Il signifie qu'étant donnée deux ensembles x et y, il existe un ensemble A qui n'a pour éléments que x et y; cet ensemble est unique par l'axiome d'extensionnalité et on le notera $\{x, y\}$. Par l'axiome d'extensionalité, cet ensemble est unique et l'on peut définir la paire $\{a, b\}$ par l'unique c tel que $\forall z((z \in c) \Leftrightarrow (z = a \vee z = b))$. On peut également définir le singleton $\{a\}$ comme l'ensemble $\{a, a\}$. Comme $\{a, b\} = \{b, a\}$; on définit également la paire ordonnée (a, b) par $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

4.2.2.2 Axiome de la réunion

$$\forall E \exists A(\forall z(z \in A) \Leftrightarrow (\exists y \in E, z \in y)).$$

Cela veut dire que les éléments de A sont exactement les éléments des éléments de E. Encore une fois, un tel ensemble est unique. On le notera $\cup E$ (lire union de E). Cela correspond

informellement à une union indexée par l'ensemble d'indices E, les ensembles que l'on réunit étant précisément les éléments de E. Par exemple, si l'on sait que $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$ est un ensemble (à deux éléments), on en déduit l'existence de l'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$.

Cet axiome nous permet ainsi de définir l'union de deux ensembles arbitraires par $x \cup y = \cup\{x,y\}$. Cette définition illustre bien l'union ensembliste "naïve" car il est possible de démontrer $\forall x \forall y \forall z \quad ((z \in x \cup y) \Leftrightarrow (z \in x \vee z \in y))$ à partir des axiomes établis jusqu'ici.

4.2.2.3 Axiome des parties

Si x est un ensemble, il existe un ensemble y dont les éléments sont les sous-ensembles de x.

$$\forall x \exists y \forall t((t \in y) \Leftrightarrow (\forall v(v \in t) \Rightarrow (v \in x))$$

Soient a et b deux ensembles. L'énoncé $\forall x(x \in a) \Rightarrow (x \in b)$ exprime l'inclusion des ensembles. On abrègera les énoncés en remplacant cette formule par $a \subset b$. L'axiome des parties peut alors se reccrire de manière abrégée :

$$\forall x \exists y \forall t((t \in y) \Leftrightarrow (t \subset x))$$

Cet axiome énonce donc que si x est un ensemble, il existe un ensemble, que l'on notera $\mathcal{P}(x)$, l'ensemble des parties de x, dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de x.

4.2.2.4 Schéma d'axiomes de compréhension

Si $\mathfrak{P}(x)$ est une propriété et E un ensemble, alors le regroupement des objets x de E qui vérifient la propriété $\mathfrak{P}(x)$ est encore un ensemble. Notons que cet axiome permet de définir un ensemble à partir d'une propriété, mais seulement si les éléments appartiennent déjà à un autre ensemble : cela évite la définition d'ensembles trop gros et évite les deux paradoxes de Russell et de Cantor. Donc l'ensemble naif de tous les ensembles n'est pas un ensemble de la théorie ZF !

On peut énoncer formellement le schéma de compréhension ainsi :

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \forall A \exists B \forall x \left[x \in B \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge P\left(x, a_1, \ldots, a_n\right))\right]$$

pour toute formule P ne contenant pas d'autres variables libres que $x, a_1, \ldots, a_n$ (en particulier B ne peut apparaître dans P). Les $a_1, \ldots, a_n$ sont des paramètres de la formule P.

Ce schéma implique en particulier l'existence d'un ensemble n'ayant aucun élément. En effet, l'ensemble Y défini par :

$$\forall x(x \in Y) \Leftrightarrow ((x \in X) \wedge (x \neq x))$$

existe justement par l'axiome de compréhension et est vide. Un tel ensemble est unique par extensionnalité, on le notera $\emptyset$ par la suite.

Ce schéma permet aussi de définir l'intersection de deux ensembles, disons A et B. Il s'agit simplement de l'ensemble X défini par :

$$\forall z(z \in X) \Leftrightarrow ((z \in A) \wedge (z \in B))$$

(en le considérant ici comme un sous-ensemble de A). Une fois encore, l'extensionnalité prouve l'unicité d'un tel ensemble, on le notera $A \cap B$.

4.2.2.5 Axiome de remplacement

Les axiomes précédents ne permettent en fait pas de parler de tous les ensembles dont on aurait envie. Il faut encore ajouter la chose suivante :

On dit que $F(x, y, a_1, \ldots, a_n)$ une formule à $(n+2)$ variables libres est une relation fonctionnelle (ou classe fonctionnelle) en x et y si elle vérifie la condition suivante:

$$\forall x \forall y \forall y' \forall a_1, \ldots, \forall a_n$$

$$((F(x, y, a_1, \ldots, a_n) \wedge F(x, y', a_1, \ldots, a_n)) \Rightarrow (y = y')).$$

Cela veut exactement dire qu'étant donnés $x, a_1, \ldots, a_n$, il y a au plus un y qui vérifie $F(x, y, a_1, \ldots, a_n)$; c'est l'image de x par la fonctionnelle F.

Le schéma de remplacement dit que pour toute fonctionnelle F, si A est un ensemble, il en est de même de $F(A)$. On aimerait donc indexer les axiomes par des fonctionnelles. Seulement, cela n'est pas possible, car la propriété d'être une fonctionnelle dépend fortement de l'univers considéré et on aimerait que les axiomes n'en dépendent pas quand même. On indexe en fait

les axiomes par toutes les formules et on procède ainsi :

$$F(x, y, a_1, \ldots, a_n) \text{ fonctionnelle } \Rightarrow$$

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \forall A \exists B \forall y$$

$$((y \in B) \Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge F(x, y, a_1, \ldots, a_n))).$$

L'ensemble B sera noté $F(A)$.

Une variante du schéma de remplacement tel qu'énoncé ci-dessus, est de supposer qu'en plus d'être fonctionnelle, la relation définie par F (avec les notations ci-dessus) est partout définie sur l'univers, on ajoute donc l'hypothèse :

$$\forall a_1 \ldots \forall a_n \forall x \exists y F(x, y, a_1, \ldots, a_n)$$

Dans ce cas on peut utiliser la notation $y = \phi(x)$ pour la fonctionnelle $F(x, y, a_1, \ldots, a_n)$. Si A est un ensemble, alors l'ensemble obtenu par remplacement, à partir de la relation fonctionnelle F se note alors $\{\phi(x) \mid x \in A\}$.

Quand f est une fonction (au sens ensemble de couples) définie sur A, on note également

$$\{f(x) \mid x \in A\} = \{y \mid \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$$

l'ensemble dont l'existence se justifie par le schéma de compréhension.

4.2.2.6 Axiome de l'infini

Il existe un ensemble infini, c'est à dire par définition un ensemble qui comporte un sous ensemble différent de lui-même et aussi gros que lui-même. Il y a moult façons de le formuler, par exemple :

$$\exists X((\exists x \in X) \wedge (\forall x \in X, x \cup \{x\} \in X))$$

où $\{x\}$ est l'ensemble contenant uniquement x, il existe en vertu de l'axiome de la paire.

4.2.2.7 Axiome de fondation

Il n'existe pas de chainnes infinies descendantes d'ensembles (x_n) tel que x_{n+1} appartient à x_n appartient à... x_1, appartient à x_0. En particulier cet axiome évite l'existence d'un ensemble

x qui appartienne à x. Plus précisément, l'axiome de fondation précise que tout ensemble non vide contient un autre ensemble dont l'intersection avec le premier ensemble est vide. La façon la plus simple d'écrire cela sous forme d'un axiome est sans doute la suivante :

$$\forall x(x \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists y \in x, (x \cap y) = \emptyset).$$

4.2.3 Théorie de Zermelo

La théorie de Zermelo est une présentation moderne de la théorie publiée par ce dernier en 1908, présentée explicitement ou implicitement dans le cadre de la logique du premier ordre avec égalité. Elle comporte les axiomes suivants :

- Axiome d'extensionnalité ;

- Axiomes de construction :

    - Axiome de la paire ;
    - Axiome de la réunion;
    - Axiome de l'ensemble des parties ;
    - Axiome de l'infini ;
    - Schéma d'axiomes de compréhension.

Remarque. L'axiome de l'ensemble vide, parfois introduit séparément, se déduit du schéma d'axiomes de compréhension (en logique du premier ordre)

4.2.4 Théorie de Zermelo-Fraenkel

Elle comporte en plus :

- Schéma d'axiomes de remplacement;
- Axiome de fondation.

Le schéma d'axiomes de remplacement permet en particulier le développement de la théorie des ordinaux.

- Le schéma d'axiomes de compréhension se déduit du schéma d'axiomes de remplacement (et donc en particulier l'existence de l'ensemble vide, étant admis que tout univers ensembliste possède au moins un élément).
- L'axiome de la paire se déduit de l'axiome des parties et du schéma de remplacement.

4.3 Axiome du choix (AC)

On note ZFC le système axiomatique obtenu en ajoutant au système de Zermelo-Fraenkel (ZF) l'axiome du choix (AC).

4.3.1 Axiome du choix

Soit E un ensemble non vide, il existe une fonction f de $P(E)\backslash\{\emptyset\}$ dans E qui à toute partie non vide A de E associe un élément de cette partie. De façon plus formelle, cela s'écrit :

$$\forall E \exists f (f \text{ fonction de } P(E)\backslash\{\emptyset\} \text{ dans } E)$$

et

$$[\forall A \in P(E)\backslash\{\emptyset\} (A, a) \in f \Rightarrow a \in A]$$

Une fonction f qui vérifie cette propriété s'appelle une fonction de choix sur E. L'axiome du choix dit exactement que tout ensemble admet une fonction de choix.

Par exemple si $E = \{\{1,2,3\},\{a,b\},\{x,y\}\}$ alors on peut constituer l'ensemble $f = \{(\{1,2,3\},1),(\{a,b\},b),(\{x,y\},x)\}$.

4.3.2 Quelques formes équivalentes

L'axiome du choix est équivalent à de nombreux autres énoncés :

1. Produit cartésien d'ensembles : de façon équivalente et plus compacte, il dit qu'un produit non vide (i.e. indexé par un ensemble non vide) d'ensembles non vides est non vide.

2. Théorème de Zermelo : Tout ensemble possède un bon ordre.

3. Lemme de Zorn : Tout ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide, totalement ordonnée, est majorée, possède au moins un élément maximal

4. Principe de maximalité de Hausdorff : Tout ensemble ordonné possède une partie totalement ordonnée maximale.

5. Toute surjection est inversible à droite : soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application surjective, alors il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = Id_Y$.

4.3.3 Lemme de Zorn

Définition 4.1 Soit E un ensemble muni d'une relation binaire que l'on note $\leq$. On dit que cette relation est un ordre si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- **(réflexivité):** $\forall x \in E, x \leq x$
- **(transitivité):** $\forall x \in E \forall y \in E \forall z \in E((x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z))$
- **(antisymétrie):** $\forall x \in E \forall y \in E((x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow (x = y))$.

Une relation sur E qui verrifie juste les deux premieres conditions est ce que l'on appelle un préordre.

Définition 4.2 On dit que l'ordre est total, ou encore que E est totalement ordonné, si la relation $\leq$ vérifie en outre la condition:

$$\forall x \in E \forall y \in E(x \leq y \vee y \leq x)$$

Remarque. On dira souvent de E qu'il est un ensemble partiellement ordonné s'il est juste muni d'une relation d'ordre. Le mot "partiellement" ne sous-entend aucunement que la relation d'ordre n'est pas totale, il est juste là pour préciser qu'elle ne l'est pas forcément.

Définition4.3 Soit E un ensemble partiellement ordonné. Ce que l'on appelle un plus grand élément de E, c'est un élément x de E plus grand que tous les autres, c'est-à-dire vérifiant $y \leq x$ pour tout y dans E.

Remarque.

- La propriété d'antisymétrie prouve directement que s'il existe un plus grand élément, alors celui-ci est unique.

- Il est important de ne pas confondre cette notion avec la notion d'élément maximal. Un élément maximal de E, c'est un élément x de E tel qu'il n'existe pas de y strictement supérieur (i.e. supérieur et différent) à x.

Exemple. Pour illustrer la distinction, il est intéressant de remarquer que si E est un ensemble muni de la relation "égalité" (i.e. $x \leq y$ si et seulement si $x = y$) qui est une relation d'ordre, alors tout élément de E est un élément maximal mais E n'admet pas de plus grand élément dès qu'il est de cardinal plus grand que 2 . Il est intéressant aussi de remarquer que cet exemple prouve qu'un élément maximal n'est pas du tout forcément unique.

Remarque. Il est cependant vrai que si E est totalement ordonné, alors un élément maximal est forcément unique et que les notions d'élément maximal et de plus grand élément coincident. Il est également vrai que si E est un ensemble partiellement ordonné admettant un plus grand élément x, alors il admet un unique élément maximal qui est précisément x.

Définition 4.4 Reprenons maintenant E un ensemble partiellement ordonme so A est une partie de E, la relation d'ordre, $\leq$ disons, se restreint à A (formellement il s'agit de faire l'intersection de l'ensemble $\leq$ avec l'ensemble $A \times A$).

- On dit que A est majoré dans E s'il existe un elément x de $\mathbb{E}$ plus grand que tous les éléments de A, c'est̀--dìre tel que $y \leq x$ pour tout y dans A.

- On dit que A est une chaîne si l'ordre indunit sur A est total.

- On dit que E est inductif si toute chaîne de E est majorée.

- Finalement, on dit que E est bien ordonné si toute partie A non vide admet un plus petit élément.

Principe de maximalité de Hausdorff (PM): Tout ensemble partiellement ordonné admet une chaîne maximale.

Une autre formulation plus courante de cet énoncé est le lemme de Kuratowski-Zorn, sans doute plus connu sous le nom de lemme de Zorn.

Lemme de Zorn: Tout ensemble préordonné inductif a un élément maximal.

Equivalence de ces deux énoncés: Supposons dans un premier temps le primcipe de maximalité de Hausdorff et prenons E un ensemble partiellement ordonné inductif. Il s'agit de prouver que E admet un élément maximal. On considère pour cela, un sous-ensemble A de E qui est une chaine maximale. Elle est majorée par hypothèse. Notons x un majorant. S'il existe dans E un élément y strictement supérieur à x, alors l'ensemble $A \cup \{y\}$ serait une chaine de E contenant strictement A, ce qui est exclu. Cels prouve bien que x est un élément maximal de E,

Réciproquement, supposons le lemme de Zorn. Soit E un ensemble partiellement ordonné. On considère X le sous-ensemble de $P(E)$ formé des chaines de E que l'on ordonne par inclusion. On aftirmse que cet ensemble est inductif. En effet, étant donné une partie $\boldsymbol{X}^n$ de X, il est immédiat de constater que la réunion de $\boldsymbol{X}^*$ (quì est une partie de E) majore X'. Le lemme de Zorn appliqué à X fournit prè cisément ce que l'on cherche.

4.3.4 Applications de l'axiome du choix

L'axiome du choix est un outil central dans les mathematiques appliquees. Une des toutes premieres mentions explicites de cet axiome est due a Peano, en 1890 , dans sa preuve de l'existence d'une solution pour un systeme d'équations differentielles. Parmi les preuves classiques on mathématiques qui utilisent l'axiome du choix, on peut mentionner :

- En topologie générale: Le théorème de Tychonoff .

Théorème 4.1 Tout produit d'espaces topologiques compacts est compact.

- En algèbre : L'axiome du choix est utilisé souvent en algèbre sous une forme différente: le lemme de Zorn.

Théorème 4.2 Tout espace vectoriel possède une base.

Théorème 4.3 Tout idéal propre d'un anneau est inclus dans un idéal propre maximal.

Théorème 4.4 Tout corps possédé une unique clôture algébrique.

- En analyse fonctionnelle : Le théorème de Hahn-Banach (forme géométrique).

Théorème 4.5 Soient E un espace vectoriel topologique, A et B deux ensembles convexes non vides, disjoints, dont l'un est ouvert. Alors il existe un hyperplan H qui sépare A et B.

- **En théorie des jeux:** L'axiome du choix a pour conséquence qu'il existe un ensemble A de suites d'entiers tel qu'aucun des deux joueurs ne possède une stratégie gagnante dans le jeu suivant : ils choisissent tour à tour un entier, et le premier joueur gagne si et seulement si la suite ainsi formée appartient à A.

- **En théorie de la mesure:** L'axiome du choix permet d'affirmer l'existence de parties de $\mathbb{R}$ non mesurables au sens de Lebesgue.

L'axiome du choix est donc tres utile en mathematiques. C'est pourquoi il est accepté par les mathématiciens malgré le fait qu'il ait aussi des conséquences paradoxales, comme par exemple le célebre paradoxe de Banach-Tarski. Celui-ci énonce qu'on peut découper une boule de rayon r de maniere a obtenir des morceaux permettant de recomposer deux boules de rayon r.

4.3.5 Indépendance de l'axiome du choix

Deux résultats de logique indiquent que l'axiome du choix est indépendant des autres axiomes de la théorie des ensembles.

Théorème 4.6 (Gödel, 1938) ZFC est consistant si $ZFl'est$.

Ici consistant signifie qu'aucune contradiction ne pourra etre trouvée à partir de ces axiomes. On sait que s'il est consistant, le systeme ZF ne réfute pas l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de la négation de AC à partir des axiomes du systeme ZF.

Théorème 4.7 (Cohen, 1963) $ZF + \neg AC$ est consistant si ZF l'est.

S'il est consistant, le système ZF ne démontre pas l'axiome du choix, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de preuve de AC à partir des axiomes du système ZF.

La preuve utilise la technique du forcing, laquelle est difficile. Une autre approche, basée sur les algèbres booléennes, est censée être plus simple. Pour plus de détails,

4.4 Exercices

Exercice 1. Montrer que si $(a, b) = (c, d)$, alors $a = c$ et $b = d$.

Exercice 2. Soit $y = \{\{a, b, c\}, \{\{a, b\}\}, \{a\}, \{\{d\}\}\}$, quels sont les éléments de vy?

Exercice 3. Montrer que si a, b, c sont des ensembles, on peut définir un ensemble d dont les éléments sont exactment a, b et c. On notera $d = \{a, b, c\}$

Exercice 4. Soient a, b dewa ensembles. Montrer que $a \times b$ est un ensemble.

Exercice 5. Montrer que l'axiome de la paire est ume constiguence du schema de substitution et de l'axiome des partics.

Exercice 6. Montrer que le schéma de séparation est une conséquence du schéma de remplacement.

Exercice 7. Soit A et B dewx classes. On definit la classe $A\triangle B$, la difference symétrique de A et B par:

$$A\Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

- Montrer que si a et b sont des ensembles, la classe a Δb est un ensemble.

Exercice 8. On appelle axiome de fondation la formule suivante:

$$\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y[(y \in x) \wedge (y \cap x = \emptyset)]).$$

- Montrer que l'axiome de fondation implique:

  1. qu'un ensemble x ne peut se contenir, c'est-à-dire que pour tout ensemble $x, x \notin x$;

  2. que pour tous ensembles $x_1, \ldots, x_n$ tels que pour tout $i \geqslant 1$ et $i \leqslant n-1$, on ait $x_i \in x_{i+1}$, on a nécessairement $x_n \notin x_1$;

  3. (avec l'axiome de l'infini) qu'il n'existe pas de suite $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, d'ensembles tels que pour tout $i \geqslant 1, x_{i+1} \in x_i$.

Exercice 9. Montrer que l'axiome de la paire est une conséquence du schéma de substitution et de l'axiome des parties.

Exercice 10. On considère la théorie ZFC_{fin} qui est la théorie ZF (schéma de remplacement, axiome des parties, axiome de la réunion, axiome d'extensionnalité) avec l'axiome du choix et l'axiome de fondation. Le but de l'exercice est de donner un modele de ZFC_{fin} *qui* ne satisfait pas l'axiome de l'infini. Pour tout entier q, on définit $[q]$ comme l'unique ensemble d'entiers $\{p_1, \ldots, p_n\}$ tel que $q = \sum_{i=1}^{n} 2^{p_i}$ (penser à l'écriture de q en base 2).

On définit la relation binaire E sur $\mathbb{N}$ par : $pEq \Longleftrightarrow p \in [q]$; montrer que:

1. La structure (N, E) satisfait l'axiome d'extensionnalité;

2. Pour tout entier q, l'ensemble $[q]$ des E-éléments de q est fini;

3. Pour tout ensemble fini d'entiers $\{p_1, \ldots, p_n\}$, il existe un unique entier q tel que $[q] = \{p_1, \ldots, p_n\}$;

4. La structure (N, E) est un modele de ZFC_{fin}, et que l'axiome de l'infini n'est pas satisfait dans cette structure.

Chapter 5

Bon ordre et preuve par récurrence

5.1 Preuve par récurrence

5.1.1 Preuve par récurrence simple

Théorème 5.1 Soit $\mathcal{P}(n)$ un prédicat dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. (Initialisation)

On suppose également que pour tout entier n l'implication $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie. (Hérédité)

* Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Preuve. On raisonne par l'absurde.

Soit $E = \{n \in N, \mathcal{P}(n) \text{ est faux }\}$.

En tant que partie non vide de $\mathbb{N}$, l'ensemble E a un plus petit élément n_0.

n_0 est différent de 0 car on a supposé $P(0)$ vraie comme $0 < n_0$ on sait que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$.

$P(n_0 - 1)$ est vraie car $n_0 - 1 \notin E$.

Par hypothèse $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ d'où $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Cette méthode de démonstration utilise le principe dit : "principe du bon ordre".

Exemple. Soit la suite définie par la relation de récurrence:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

On va montrer par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

On suppose ensuite que la proposition est vraie pour n et on la démontre pour $n + 1$.

On remarquera que les termes de la suite sont positifs.

$$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u_n^2 \leq 1 \Rightarrow u_n^2 + 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1 + u_n^2}{2} \leq \frac{2}{2} = 1$$

5.1.2 Schéma de preuve par le principe du bon ordre

1. Définir l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ est faux } \}$

2. Supposer que E est non vide comme base pour une preuve par contradiction.

3. Comme $\mathbb{N}$ est bien ordonné, il y a un plus petit élément n_0 dans E.

4. Le plus petit élément ne peut pas être celui de la proposition de départ. Utiliser l'hérédité pour arriver à la contradiction.

Exemple.

Soit la suite définie par la relation de récurrence:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

On va montrer par le principe du bon ordre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. On raisonne par l'absurde.

Soit $E = \{n \in \mathbb{N}, u_n > 1\}$

En tant que partie non vide de $\mathbb{N}$ l'ensemble E a un plus petit élément n_0. On a n_0 différent de 0 car on a $u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$.

Comme $0 < n_0$ on sait que $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$ et $n_0 - 1 \notin E$.

$0 \leq u_{n_0-1} \leq 1 \Rightarrow u_{n_0-1}^2 \leq 1 \Rightarrow u_{n_0-1}^2 + 1 \leq 1 + 1 \Rightarrow \frac{1+u_{n_0-1}^2}{2} \leq \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow u_{n_0} \leq 1 \Rightarrow u_{n_0} \notin E$.

Ce qui contredit le fait que $n_0 \in E$.

Exemple. (Importance de l'initialisation)

Est ce que $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 ?

Supposons que $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7 .

On va montrer que $3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7 .

On a

$$3^{2n+6} - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n+4} - 2 \times 2^n = (7+2) \times 3^{2n+4} - 2 \times 2^n$$
$$= 7 \times 3^{2n+4} + 2 \times 3^{2n+4} - 2 \times 2^n$$

On a par conséquent la somme de deux multiples de 7 qui est donc un multiple de 7.

Ici l'initialiation est impossible pour $n = 0$ on a $3^4 - 2^0 = 80$ qui n'est pas divisible par 7.

On peut démontrer en utilisant le calcul par congruences que $3^{2n+4} - 2^n$ n'est pas un multiple de 7.

En effet on a :

$3^2 \equiv 2[7] \Rightarrow 3^{2n} \equiv 2^n[7]$ de plus on $a 3^4 \equiv 4[7]$ d'où $3^{2n+4} \equiv 4.2^n[7]$

On a également $2^n \equiv 2^n[7]$ d'où $3^{2n+4} - 2^n \equiv 3.2^n[7]$

Comme 7 ne divise pas 3 ni 2 alors 7 ne divise pas $3^{2n+4} - 2^n$.

Remarque. Pour montrer qu'une proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on remplace l'hypothèse d'initialisation par $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.

Exemple. Preuve par récurrence simple (avec un pas supérieur à 1)

La suite de Fibonnaci est donnée par

$$\begin{cases} F_0 = 0. \\ F_1 = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \end{cases}$$

Soient $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (φ est appelé le nombre d'or). On a φ et φ' sont solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Question : Montrer que pour tout $n \geq 1$ nous avons $F_n \leq \varphi^{n-1}$.

Réponse :Pour $n = 1$ on a $F_1 = 1 \leq 1 = \varphi^0$.

Pour $n = 2$ on a $F_2 = F_1 + F_0 = 1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi^1$.

On doit ensuite démontrer que :

$\forall n \geq 1 : P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$

On a par définition

$\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^n + \varphi^{n-1}$ (Par hypothèses de récurrence)

$\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^{n-1}(\varphi+1) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^{n-1}(\varphi^2)$ (Car $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+2} \leq \varphi^{n+1}$

5.1.3 Preuve par récurrence généralisée

Théorème 5.2 Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$.

On suppose que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. (Initialisation)

On suppose également que pour tout entier n que l'implication $(\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vraie. (Hérédité)

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Preuve. Soit la proposition $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n) = Q(n)$.

On va montrer que $Q(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$ si et seulement si $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

Ici il s'agit de montrer une équivalence, on doit donc montrer deux implications.

Implication n°1

On va montrer que si $Q(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$ alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

On a $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n)$ Vrai, par conséquent $\mathcal{P}(0)$ Vrai et $\mathcal{P}(1)$ Vrai ...et $\mathcal{P}(n)$ Vrai donc $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

Implication n°2

On va montrer que si $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour toute valeur de $\mathbb{N}$, alors $Q(n)$ est vrai pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

Comme $P(n)$ est vraie pour toute valeur de $\mathbb{N}$ par conséquent $\mathcal{P}(0)\wedge\mathcal{P}(1)\wedge\ldots\wedge\mathcal{P}(n)$ est également vrai et donc $Q(n)$ est vrai pour toute valeur de $\mathbb{N}$.

Exemple. Démontrer que tout n entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

Démonstration.

Notons $P(n)$ la propriété : tout entier k de $\{2; 3; 4 \ldots .; n-1; n\}$ peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

i) On a P(2) est vraie car $2 = 2$.

ii) Supposons que $P(k)$ est vraie pour tout entier naturel $2 \leq k \leq n$. Il faut prouver que $P(n+1)$ est vraie.

- Si $n+1$ est premier on peut écrire $n+1 = n+1$.

- Si $n+1$ n'est pas premier il admet donc un diviseur premier p et on $a : n+1 = q.p$

  On a nécessairement $q \leq n$ et donc selon (ii) q se décompose en produit de facteurs premiers.

Par conséquent, $P(n+1)$ est vraie.

5.1.4 Preuve par récurrence forte

Théorème 5.3 Soit $\mathcal{P}$ une proposition dépendant d'un élément n de $\mathbb{N}$.

Si pour tout n on $a : \forall k < n : \mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Preuve. On effectue la preuve par récurrence généralisée sur n.

On a pour $n = 0$.

$\forall k < 0 : \mathcal{P}(k)$ Cette proposition est vraie car k appartient à l'ensemble vide.

On suppose que la proposition $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n)$ est vraie et on démontre que $\mathcal{P}(n+1)$.

Comme $\mathcal{P}(0) \wedge \mathcal{P}(1) \wedge \ldots \wedge \mathcal{P}(n)$ est vraie alors $\forall k < n+1 : \mathcal{P}(k)$ est vraie.

D'où on obtient $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

5.1.5 Cas particulier de preuve par récurrence (récurrence de Cauchy)

Proposition 5.1 Soit $P(n)$ un prédicat qui vérifie :

$$\begin{cases} (i) : P(1) \text{ est vraie.} \\ (ii) : \forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(2n) \\ (\text{ iii }) : \forall n \in \mathbb{N} : P(n+1) \Rightarrow P(n) \end{cases}$$

Alors $P(n)$ est vraie pour toute valeur de n.

5.1.6 Preuve de l'inégalité de Cauchy Scwhartz par récurrence.

Théorème 5.4 Moyenne harmonique, géométrique et arithmétique.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels positifs, alors :

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 \ldots + a_n}{n}$$

L'égalité ayant lieu si et seulement si tous les a_i sont égaux.

Preuve. Pour $n = 2$, il faut établir que $a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$ c'est à dire $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$ ce qui est vrai.

On va montrer $P(n) \Rightarrow P(n-1)$ Posons $A = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}$ alors:

$$\left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\right) A \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k + A}{n}\right)^n = \left(\frac{(n-1)A + A}{n}\right)^n = A^n$$

5.2 Ordre bien fondé

5.2.1 Ordre et ordre strict

Définition 5.1 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que $\mathcal{R}$ est réflexive quand : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est symétrique quand : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est anti-symétrique quand : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.
- On dit que $\mathcal{R}$ est transitive quand : $\forall (x, y, z) \in E^3, x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Définition 5.2 Une relation binaire est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Exemple. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre usuel $(\leq)$.

Donc $\prod_{k=1}^{n-1} a_k \leq A^{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-1}\right)^{n-1}$

On démontre à présent que $P(n) \Rightarrow P(2n)$

$$\prod_{k=1}^{2n} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=n+1}^{2n} a_k\right) \overset{P(n)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{n}\right)^n \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{a_k}{n}\right)^n$$
$$\overset{P(2)}{\leq} \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{n}}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{2n} a_k}{2n}\right)^{2n}$$

L'inégalité de gauche se déduit de la précédente en considérant $\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}$

Exemple. Sur l'ensemble des parties d'un ensemble, la relation $\subset$ est une relation d'ordre.

Exemple. L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation $<$.

Proposition5.2 Une relation d'ordre strict est antisymétrique.

Preuve. $\mathcal{R}$ est par définition transitive et anti réflexive.

Une relation est antisymétrique si elle vérifie

$\forall(x,y) \in E^2, \quad (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$

On va montrer que dans une relation d'ordre strict la proposition $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ est toujours fausse.

On raisonne par l'absurde.

On suppose qu'il existe $(x,y) \in E^2$ tel que la proposition $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ est vraie. Alors par transitivité on obtient $x\mathcal{R}x$ vraie ce qui contredit le fait que $\mathcal{R}$ est anti réflexive.

Par conséquent, la proposition $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x$ est toujours fausse et donc l'implication logique $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$ est toujours vraie.

Définition 5.3 Soit $(E,\mathcal{R})$ un ensembe ordonné. Deux éléments x et y sont dits comparables si on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$. Dans le cas contraire on dit que x et y sont incomparables.

Exemple. Soit l'ensemble $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$-l'ensemble des parties de $\{a,b,c\}$ - muni de la relation d'ordre $\subset$.

Les éléments $\{a,b\}, \{b,c\}$ sont incomparables.

Définition 5.4 Un ordre strict est dit strict total si deux éléments distincts sont toujours comparables

$\forall(x,y) \in E, x \neq y \Rightarrow x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$

Remarque. Dans ce qui suit nous noterons une relation d'ordre par $\preceq$ une relation d'ordre stricte par $\prec$.

5.2.2 Minorants, majorants, minimaux et maximaux

Définition 5.5 Soit $(E,\preceq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E.

On dit que $x \in E$ est un minorant de F si on a :

$\forall y \in F, x \preceq y$

Si le minorant de F est un élément de F on dit que c'est le plus petit élément ou le minimum de F.

On dit que $x \in E$ est un majorant de F si on a :

$\forall y \in F, y \preceq x$

Si le majorant de F est un élément de F on dit que c'est le plus grand élément ou le maximum de F

Définition 5.6 Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E.

- Un élément x est un élément minimal de F quand aucun élément de F n'est strictement plus petit que x :

$$\forall y \in F, y \preceq x \Rightarrow x = y$$

- Un élément x est un élément maximal dans de F quand aucun élément de F n'est strictement plus grand que x :

$\forall y \in F, x \preceq y \Rightarrow x = y$

Remarque. Si la relation est d'ordre total alors les notions d'élément minimal et et de minimum coincident. (Même remarque pour la notion d'élément maximal et de maximum).

Exemple. 0 est un élément minimal de $(\mathbb{N}, \leq)$ c'est également son minimum.

Exemple. Soit l'ensemble $\mathcal{P}(\{a, b, c\})\backslash\{\varnothing\}$ muni de la relation d'ordre partiel $\subset$. Les éléments $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ sont des éléments minimaux mais il n y a pas de minimum.

Bibliography

[1] P. Franceschi. *Introduction la philosophie analytique paradoxes, aryuments et problèmes contemporains*. Paul Franceschi, 2015.

[2] S. Fratani and al. *Cours Logique et Calculabilite, L3 Informatique, 2015*. Disponible à l'adresse : https://pageperso.lislab.fr/luigi.santocanale/teaching/1415teaching/LC/DOCS/old/cours_2303-2015.pdf.

[3] C. Huayi. *Notes du cours : Introduction aux raisonnements mathématiques, 2008*. Disponible à l'adresse : http://www-fourier.ujfgrenoble.fr/huayi/Enseignments/ParisVIII/2007_2008/logique.pdf.

[4] T. Seiller. *Théorie des Ensembles, 2010*. Disponible à l'adresse : http://www.pps.univparis-diderot.fr/seiller/documents/thens.pdf.

[5] O. Simon. *Nombres réels, 2005*. Disponible à l'adresse : http://capes-math.univrennes1.fr/cours-pdf/reels.pdf.

[6] F. Sturm. *Cours de mathématiques - ASINSA-1 : Introduction la logique mathématique, 2013*. Disponible à l'adresse : http://maths.insalyon.fr/fsturm/TELECHARGEMENT/COURSASINSA1/che_cours_ASINSA1_logique.pdf.

[7] J. Vélu. *Méthodes mathématiques pour Informatiques*. Dunod, 2003.

[8] Wikipedia. *Logique intuitionniste*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Logique_intuitionniste.

[9] Wikipedia. *Paradoxe de Russell*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Russell.

[10] Wikipedia. *Paradoxe du barbier*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_du_barbier.

[11] Wikipedia. *Paradoxe du menteur*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_du_menteur.

[12] Wikipedia. *Paradoxe de Cantor*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Cantor.

[13] Wikipedia. *Paradoxe de Richard*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Richard.

[14] Wikipedia. *Paradoxe de Grelling-Nelson*. Disponible à l'adresse : https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Grelling-Nelson.