محاضرات في الاحصاء 3

بدار عاشور

2024-2023

توزيع المحاضرات:

المحاور	المحاضرات	الأعمال الموجهة
المحور الأول	**اهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة** 1. مقدمة 2. توزيع برنولي 3. توزيع ثنائي الحدين 4. توزيع بواسون 5. التوزيع الهندسي 6. التوزيع فوق الهندسي	– سلاسل تطبيقية
المحور الثاني	**أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة** 1- مقدمة 2- التوزيع الطبيعي 3- التوزيع المنتظم 4- التزويع الاسي 5- توزيع قاما(Gamma) 6- توزيع Betta	– سلاسل تطبيقية
المحور الثالث	**توزيعات احتمالية متصلة أخرى** 1. مقدمة 2. توزيع كاي مربع 3. توزيع ستودنت 4. توزيع فيشر	– سلاسل تطبيقية
المحور الرابع	**المتغيرات العشوائية المزدوجة وتوزيعاتها الاحتمالية** 1. مقدمة 2. تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية ، 3. المتغيرات العشوائية المزدوجة المنفصلة والمتصلة وخواصها 4. دوال المتغيرات العشوائية المزدوجة.	– سلاسل تطبيقية

بسم الله الرحمـــن الرحيم

المحور الأول: اهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

1- مقدمة:

1-1- تمهيد: في هذا المحور نتطرق إلى بعض القوانين الخاصة والشهيرة للتوزيعات الاحتمالية والتي صيغت من قبل إحصائيين ورياضيين ، حيث نبدأ بتلك القوانين المصاغة لمتغيرات عشوائية متقطعة، في حين نترك تلك الخاصة بالمتغيرات العشوائية المستمرة للمحور الموالي.

إن التحدث عن هذه القوانين أمر مهم للغاية حيث يمكننا في الكثير من الأحيان من حساب وبسهولة مختلف الاحتمالات وكذا الخصائص العددية للمتغيرات العشوائية التي تتبع أحد هذه القوانين دون الحاجة للمرور بالمراحل التقليدية كتعيين فضاء العينة وحساب الخصائص العددية في كل مرة، أما من الناحية التطبيقية فلهذه القوانين فائدة كبيرة كونها تلخص وتجمع التجارب العشوائية المتشابهة ، ضمن قوانين توزيع يمكن الرجوع إليها والاستناد عليها في مختلف البحوث الإحصائية التطبيقية.

1-2- تذكير ببعض المفاهيم:

أ- شروط التوزيع الاحمالي المتقطع:

إذا كانت x متغير عشوائي منفصل يأخذ القيم :

$$x1 \ , \ x2 \ , \ \ldots\ldots\ldots , \ xn$$

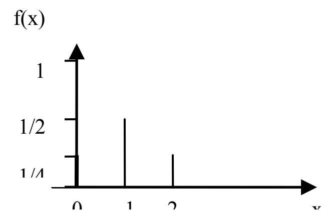
باحتمالات $P(x1) , P(x2) , \ldots\ldots , P(xn)$

بشرط : لجميع قيم x $\quad (1)\ P(x) \geq 0$

$$(2)\ \sum P(x) = 1$$

فإنه يقال أن X متغير عشوائي له توزيع احتمالي منفصل دالته الاحتمالية $P(x)$

ب- التمثيل البياني: على معلم متعامد ومتجانس، في محور التراتيب نظع قيم المتغير العشوائي، وعلى محور الفواصل نضع قيم الاحتمال الموافقة لقيم المتغير العشوائي، حيث لا تتعدى قيمة الواحد الصحيح.



ج- الخصائص العددية للتوزيع المتقطع:

(1) توقع التوزيع [التوقع الرياضي – متوسط التوزيع] : Mathematical Expectation

$$E(x) = \mu = \sum xi\ P(xi)$$

(2) تباين التوزيع : Variance $\quad v(x) = \sigma^2 = \sum x^2 P(x) - \mu^2$

(3) الانحراف المعياري : Standard Deviation $\quad \sqrt{V(x)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$

مثال: بينت دراسة ميدانية أن عدد الوحدات المباعة من منتوج ما في اليوم تخضع لقانون التوزيع الاحتمالي التالي:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0.10	0.16	0.25	0.30	0.13	0.05	0.01

المطلوب:

1. هل يعتبر التوزيع توزيعا احتماليا؟
2. ماهو احتمال بيع : وحدتين على الأكثر، أربع وحدات على على الاقل ؟
3. أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

1. هل يعتبر التوزيع توزيعا احتماليا:

بما ان التوزيع يحقق الشرطان فهو توزيع احتمالي.

2. احتمال بيع :

وحدتين على الأكثر:

$P(x \leq 2) = P(x = 0)+ P(x = 1) + P(x =2) =0.1+0.16+0.25=0.51$

أربع وحدات على على الاقل:

$P(x \geq 4) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6)= 0.13+0.05+0.01=0.19$

3. أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري.

X	0	1	2	3	4	5	6	$\sum$
P(X)	0.10	0.16	0.25	0.30	0.13	0.05	0.01	1
X.P(X)	0	0.16	0.5	0.9	0.52	0.25	0.06	2.39
X^2	0	1	4	9	16	25	36	
X^2.P(X)	0	0.16	1	2.7	2.08	1.25	0.36	7.55

$E(X)= \sum xi\ P(xi)=2.39$

$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=7.55-(2.39)^2=1.83$

$\sqrt{V(x)} = \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \quad = 1.35$

2- توزيع برنولي:

2-1- التعريف: وهو توزيع منفصل، يكون فيه المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط هما $X = 0$ و $X = 1$، أي أن مجموعة الأساس E تحتوي على حادثتين فقط، النجاح والذي نرمز له بالرمز: p، والخسارة أو الفشل والذي نرمز له بالرمز: $q = 1 - p$، ونكتب $X \to B(1, p)$ ، ويكون التوزيع الاحتمالي بالشكل التالي:

X	0	1	$\sum P(x)$
$P(x)$	q	p	1

قانون برنولي يعبر على تجربة عشوائية تتكرر مرة واحدة ونعبر بـ : $X = 1$ على النتيجة التي تتوفر فقط الخاصية المدروسة و $X = 0$ إذا لم تتحقق الصفة المدروسة.

2-2 الخصائص العددية لتوزيع برنولي:

أ- التوقع الرياضي: $E(X)=\sum x_i p_i = 0.q+1.p=p$

ب- التباين: $V(X)=p(1-p)=p.q$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p.q}$

مثال07 : نرمي زهرة نرد مرة واحدة، نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور رقم زوجي.

1- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

2- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير.

الحل : X: عدد مرات ظهور رقم زوجي.   النجاح (ظهور رقم زوجي) : $X=1$ ، الفشل(ظهور رقم فردي) : $X=0$

1- تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

بما أن المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط (0،1) أو (نجاح وفشل) فهو يتبع توزيع برنولي، أي: $X \to B(1{,}0.5)$

ويكون توزيعه الاحتمالي كالتالي:

X	0	1	$\sum P(x)$
$P(x)$	0.5	0.5	1

2- حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير:

أ- التوقع الرياضي: $E(X)=\mu=p=0.5$

ب- التباين: $V(X)=p(1-p)=p.q=0.5*0.5=0.25$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p.q}=\sqrt{0.25}=0.25$

3- توزيع ثنائي الحدين:

3– 1- التعريف: يستند هذا التوزيع على تجربة برنولي إذا تكررت n مرة، أي إذا كان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q، فإن احتمال ظهور الحدث x مرة من بين الـ n مرة يتبع توزيع ذي الحدين، الذي دالته الاحتمالية:

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$$

$$x=0,1,2,3,\dots,n \qquad\qquad n=1,2,3,\dots$$

ونكتب : $X \to B(n,p)$

حيث :

n: عدد مرات إجراء التجربة (عدد المحاولات).

p: احتمال وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال النجاح).

q: احتمال عدم وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال الفشل).

x: عدد مرات وقوع الحدث (عدد مرات النجاح) وهو متغير يأخذ القيم $0,1,2,\dots,n$

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً، لابد أن يكون:

$$\sum P(X=x)=\sum C_n^x p^x q^{n-x}=1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع، هو توزيع منفصل، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة، ويتوقف على قيمة الاحتمال، مع الشروط الأربعة التالية:

1. عدد الاختبارات محدود.
2. لكل اختبار نتيجتين فقط: نجاح أو فشل.
3. احتمال النجاح يبقى ثابت في كل الاختبارات.
4. الاختبارات مستقلة عن بعضها البعض.

2-3- الخصائص العددية لتوزيع ثنائي الحدين:

أ- التوقع الرياضي: $E(X) = \sum x_i p_i = n \,.\, p$

ب- التباين: $V(X) = n\,.p.\,(1-p) = n.p.q$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q}$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي، كما يستعمل في حالة تقارب النجاح والفشل أي : $p \cong q$ و $n \leq 30$

مثال08 : ألقي حجر نرد 7 مرات، نفرض أن النجاح هو الحصول على الرقم 5 أو 6 في أي رمية. أحسب:

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط.

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة.

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل.

4- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري.

الحل: بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$، $q = \frac{2}{3}$، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم: $n = 7$، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية:

$$P(X = x) = C_7^x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{7-x} \qquad X = 1,2,3,4,5,6,7$$

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط:

$$P(X = 3) = C_7^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = 35 \times 0.037 \times 0.197 = 0.255$$

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة:

$$P(X = 0) = C_7^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{7-0} = \left(\frac{2}{3}\right)^7 = (q)^7 = 0.058$$

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل:

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = 7) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.058 = 0.942$$

4- حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري:

أ- توقع التوزيع (الوسط الحسابي): $E(X) = n.p = 7.\frac{1}{3} = 2.33$

ب- التباين: $V(X) = n.p.q = 7.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = 1.55$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1.55} = 1.24$

4- توزيع بواسون:

4- أ- التعريف: هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة، مثل: الحرائق في إحدى المدن، الزلازل، الحوادث على إحدى الطرق، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، ... الخ . ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة.

فإذا كانت x ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة، فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون:

$$P(X = x) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} \qquad x = 0,1,2,3,\dots,n \qquad n = 1,2,3,\dots$$

ونكتب اختصارا: $X \to P(\lambda)$

حيث: λ: متوسط التوزيع ، $e = 2.718$ (مقدار ثابت) :

ويتحدد هذا التوزيع بمعرفة المتوسط λ. وحتى يكون هذا التوزيع احتماليا ، لابد أن يكون:

$$\sum P(X = x) = \sum e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^x}{x!} = 1$$

4-2- الخصائص العددية لتوزيع بواسون:

أ- التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda$

ب- التباين: $V(X) = \lambda$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda}$

مثال09: إذا كان معدل حالات الطوارئ في إحدى المستشفيات هو 5 كل يوم، فما احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام.

الحل: بما أن حالات الطوارئ هو حدث نادر واحتمال وقوعه ضعيف جدا، فإن المتغير العشوائي لحالات الطوارئ يتبع توزيع بواسون حيث: $\lambda = 5$، وتكون دالته الاحتمالية كما يلي:

$$P(X = x) = e^{-5}\,\frac{5^x}{x!}$$

- احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام: $P(X = 2) = \frac{e^{-5}(5)^2}{2!} = 0.084$

ملاحظة: إذا كان $(n \geq 30)$ و $(P \leq 0{,}05)$ فإن قانون بواسون يعطي نتائج قريبة من القانون الثنائي، وبالتالي كقاعدة عامة فإننا نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون، أي نستخدم قانون بواسون لحساب الاحتمالات بدل قانون ثنائي الحدين.

مثال10: إذا كان 3% من انتاج إنتاج آلة ما يعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من انتاج هذه الآلة عشوائيا، أحسب احتمال أن يكون هناك وحدتان تالفتان؟

الحل: القانون الأصلي هو قانون ثنائي الحدين، $\boldsymbol{X \to B(30\ ,\ 0.03)}$

ومنه: $P(X = 2) = C_{30}^{2}(0{,}03)^2(0{,}97)^{28} = 0{,}17$

لدينا: $(n \geq 30)$ و $(P \leq 0{,}05)$ وبالتالي: نقرب قانون ثنائي الحدين من قانون بواسون فنجد:

$$\lambda = np = 30(0{,}03) = 0{,}9$$

$$P(X = 2) = e^{-2}\,\frac{(0{,}9)^2}{2!} = 0{,}17$$

5- التوزيع الهندسي:

5-1- التعريف: وضع هذا التوزيع ليتجاوز عن شرط استقلالية الاحداث عن بعضها البعض، لذلك فعدما لا يتحقق هذا الشرط فإن التوزيع المناسب للمتغير العشوائي يصبح التوزيع الهندسي،حيث تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة الى حد كبير لتجارب توزيع برنولي، التي تفترض أن نتيجة كل تجربة إما نجاح المحاول *P* او فشلها *1-P* ، كما أن عدد كما وان عدد المحا ولات في تجارب التوزيع الهندسي لم تكن محددة من البداية كما هو الحال في تجارب توزيع ذي الحدين، وعلى هذا الأساس فان المتغير العشوائي المنفصل *(X)* حالة تجارب التوزيع الهندسي، هو عبارة عن عدد محاولات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح ، وبذلك فان أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة *(X)* تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة *(X-1)*.

وبافت ا رض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن *(X)* يمثل عدد المحاولات اللزمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة يقال بأن هذا المتغير العشوائي يتبع التوزيع الهندسي، بالصيغة التالية : $P(X=K)=p.q^{(k-1)}$

و يكتب : $X \sim Geam(P)$

2-5- الخصائص العددية:

أ- التوقع الرياضي: $E(X)=1/p$

ب- التباين: $V(X)=1-P/p^2$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

مثال: رميت زهرة نرد متجانسة في تجربة عشوائية، حتى يتم الحصول على أحد الأوجه.

المطلوب: - كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

- ما هو احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الاقل ، حتى تحصل على العدد 5 على وجه الحجر.

- ما هو معدل عدد المحاولات التي تحتاجها ؟

الحل:

1- كتابة دالة التوزيع للمتغير العشوائي:

بما أن احتمال الحصول على أحد الأوجه الستة في الرمية الواحدة يساوي $\frac{1}{6}$ **فإن :** $P(X)=1/6$

والاحداث غير مستقلة، فإن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الهندسي:

$$P(X=x)=\begin{cases}(\frac{1}{6}).(\frac{5}{6})^{X-1} & si: X=1,2,......,\infty \\ 0 & \sin on\end{cases}$$

2- احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الاقل ، حتى تحصل على العدد 5 على وجه الحجر:

$$\begin{aligned}P(X\geq 4)=1-P(X<4)&=1-\left[P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\right]\\&=1-\left[\frac{1}{6}).(\frac{5}{6})^{1-1}+\frac{1}{6}).(\frac{5}{6})^{2-1}+\frac{1}{6}).(\frac{5}{6})^{3-1}\right]\\&=1-\frac{91}{216}=0;579\end{aligned}$$

3- معدل عدد المحاولات التي تحتاجها: $E(X)=1/P=1/(1/6)=6$

6- التوزيع فوق الهندسي:

6-1- التعريف: عند دراستنا للتوزيع الثنائي يتضح لنا أن عمليات السحب لتكوين العينة كانت تتم مع إعادة العنصر المسحوب إلى المجتمع، وهذا يترتب عنه أمران، يعتبران بمثابة شرطي تطبيق التوزيع الثنائي، هما:

- أن جميع السحبات (أو التجارب) مستقلة عن بعضها البعض.

- أن احتمال النجاح في تجربة واحدة p ثابت.

لكن هناك بعض الحالات لا يمكن أن يتم فيها السحب مع الإعادة (كإجراء فحص حول الإصابة بمرض معين) وهنا يختل شرطا تطبيق التوزيع الثنائي (استقلال التجارب، وثبات p) فنلجأ إلى تطبيق قانون آخر يسمى قانون فوق الهندسي.

وعليه فإن احتمال عدد ما x من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق قانون التوزيع الاحتمالي الذي يعرف بفوق الهندسي التالي:

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \quad X=0,1,2,3,\dots,n \qquad n=1,2,3,\dots$$

ونكتب اختصارا: $X \to H(N, N_1, n)$

حيث:

x: يمثل عدد مرات النجاح

N: حجم المجتمع

N_1: حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصية المدروسة

N_2: حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصية المدروسة

n: عدد التجارب (حجم العينة).

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع فوق الهندسي هي:

أ- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n؛

ب– السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة؛

ج- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة).

2-6 الخصائص العددية للتوزيع فوق الهندسي:

أ- التوقع الرياضي: $E(X)=n.\frac{N_1}{N}=n.p$

ب- التباين: $V(X)=n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$

ج- الانحراف المعياري: $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}$

مثال11: تتكون لجنة التنظيم في أحد المسابقات الوطنية الجامعية لاختيار أحسن مؤسسة ناشئة من 4 ذكور و7 إناث، سحبنا بصورة عشوائية لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص لاختيار أحسن مشروع في النهائيات، نفرض أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن عدد الذكور الذين يتم اختياهم.

المطلوب: 1- أكتب قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي.

2- أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

1- كتابة قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي:

بما أن التجربة برنولية (مكررة 4 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الذكور في اللجنة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات: $X \to H(11\ ,\ 4\ ,4)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي:

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_4^x.C_7^{4-x}}{C_{11}^4} \qquad X=0,1,2,3,4 \qquad n=4$$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0.C_7^{4-0}}{C_{11}^4}=0.106 \quad ,P(X=1)=\frac{C_4^1.C_7^{4-1}}{C_{11}^4}=0.424 \quad ,P(X=2)=\frac{C_4^2.C_7^{4-2}}{C_{11}^4}=0.382$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3 . C_7^{4-3}}{C_{11}^4}=0.085 \qquad , P(X=4)=\frac{C_4^4 . C_7^{4-4}}{C_{11}^4}=0.003$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	4	$\sum P(x)$
$P(x)$	0.106	0.424	0.382	0.085	0.003	1

2- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:

أ- التوقع الرياضي:

$$E(X)=n.\frac{N_1}{N}=n.p=4.\frac{4}{11}=\frac{16}{11}=1.45$$

ب- التباين:

$$V(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=4.\frac{4}{11}.\frac{7}{11}\left(\frac{11-4}{11-1}\right)=0.65$$

ج- الانحراف المعياري:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}=\sqrt{0.64}=0.8$$

ملاحظة: إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N، فإن معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين لهذا التوزيع تساوي قيمة التباين التي توصلنا إليها من قانون ثنائي الحدين، وبالتالي كقاعدة عامة، إذا كان $\left(\frac{n}{N}\leq 0.05\right)$ فإننا نقرب توزيع فوق الهندسي من التوزيع ثنائي الحدين، أي نستخدم قانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات بدل قانون فوق الهندسي، أي :

$$X \to B(n,p)\ X \to H(N,N_1,n) \longrightarrow$$

مثال12 : صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين ؟

الحل : القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي، $X \to H(100\,,60\,,3)$

لدينا : $\left(\frac{n}{N}=\frac{3}{100}=0.03\leq 0.05\right)$ وبالتالي نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين أي : $X \to B(3{,}0.6)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\mathrm{C}_3^2(0.6)^2(0.4)^1=0.432$$