تمهيد :

بعد تطرقنا في دراستنا السابقة للمتغير العشوائي المتقطع ودالة الكثافة الاحتمالية أو دالة التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين له بصورة عامة، سنتطرق في هذا المحور لبعض التوزيعات الاحتمالية المتقطعة الخاصة، نظرا لأهميتها في الحياة العملية في تفسير كثير من الظواهر العشوائية التطبيقية، ومن التوزيعات التي سوف نتناولها في هذا المحور : توزيع برنولي، توزيع ثنائي الحدين، توزيع بواسون، التوزيع الهندسي، التوزيع فوق الهندسي.

أولا : توزيع برنولي

1- التعريف : وهو توزيع منفصل، يكون فيه المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط هما X=0 و X=1، أي أن مجموعة الأساس E تحتوي على حادثتين فقط وهي النجاح والذي نرمزله بالرمز p والخسارة أو الفشل والذي نرمزله بـ q=1-p، ونكتب $X \to B(1,p)$ ، ويكون التوزيع الاحتمالي بالشكل التالي :

X	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	q	p	1

وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع كالتالي :

$$P(X=x)=p^{x}q^{1-x} \qquad x=0,1$$

قانون برنولي يعبر على تجربة عشوائية تتكرر مرة واحدة ونعبر بـ : X=1 على النتيجة التي تتوفر فقط الخاصية المدروسة و X=0 إذا لم تتحقق الصفة المدروسة .

2- الخصائص العددية لتوزيع برنولي :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=\sum x_i p_i = 0.q+1.p=p$$

ب- التباين :

$$V(X)=p(1-p)=p.q$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p.q}$$

مثال 01 : نرمي زهرة نرد مرة واحدة، نعرف النجاح بالحصول على العلامة 1 في حالة ظهور أي رقم زوجي.

1- حدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يعبر عن النجاح في هذه التجربة العشوائية ؟

2- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير؟

الحل : X : ظهور رقم زوجي،   النجاح (ظهور رقم زوجي) : X=1 ،   الفشل(ظهور رقم فردي) : X=0

1- تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

بما أن المتغير العشوائي X يحتمل قيمتين فقط (0،1) أو (نجاح وفشل) فهو يتبع توزيع برنولي أي : $X \to B(1{,}0.5)$ ويكون توزيعه الاحتمالي كالتالي :

X	0	1	$\sum$
$P(X=x_i)$	0.5	0.5	1

2- حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = p = 0.5$$

ب- التباين :

$$V(X) = p(1-p) = p.q = 0.5 * 0.5 = 0.25$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p.q} = \sqrt{0.25} = 0.25$$

ثانيا : توزيع ثنائي الحدين

1- التعريف : يستند هذا التوزيع على تجربة برنولي إذا تكررت n مرة، أي إذا كان احتمال ظهور حدث ما مرة واحدة (النجاح) هو p، واحتمال عدم ظهور الحدث مرة واحدة (الفشل) هو q، فإن احتمال ظهور الحدث (x) مرة من بين الـ n مرة يتبع توزيع ذي الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$f(x_i) = P(X = x_i) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$X = 0,1,2,\ldots,n \quad p > 0 \;, q < 1 \;, p + q = 1$$

ونكتب : $X \to B(n, p)$

حيث :

n : عدد مرات إجراء التجربة (عدد المحاولات)

p : احتمال وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال النجاح)

q : احتمال عدم وقوع الحدث في أي محاولة (احتمال الفشل)

x : عدد مرات وقوع الحدث (عدد مرات النجاح) وهو متغير يأخذ القيم 0,1,2,...,n

وحتى يكون هذا التوزيع احتمالياً، لابد أن يكون :

$$\sum P(x) = \sum C_x^n p^x q^{n-x} = 1$$

ويلاحظ أن هذا التوزيع، هو توزيع منفصل، يستخدم في حالة الأحداث المستقلة، ويتوقف على قيمة الاحتمال، مع الشروط الأربعة التالية :

1. عدد الاختبارات محدود
2. لكل اختبار نتيجتين فقط : نجاح أو فشل
3. احتمال النجاح يبقى ثابت في كل الاختبارات
4. الاختبارات مستقلة عن بعضها البعض.

2- الخصائص العددية لتوزيع ثنائي الحدين :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = \sum x_i p_i = n \cdot p$$

ب- التباين :

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p) = n \cdot p \cdot q$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

وهذه الخصائص يمكن إيجادها مباشرة من المسألة، حتى قبل حساب التوزيع الاحتمالي، كما يستعمل في حالة تقارب النجاح والفشل أي : $p \cong q$ و $n \le 30$

مثال 02 : رميت قطعة نقد متزنة 3 مرات، إذا عرف المتغير العشوائي X بأنه عدد مرات ظهور الصورة، فأوجد دالة التوزيع الاحتمالي والتوقع والتباين للمتغير العشوائي X :

1- باستخدام نقاط فراغ العينة.

2- باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين.

3- قارن بين الحلين.

الحل :

1- باستخدام نقاط فراغ العينة : عند رمي قطعة نقدية ثلاث مرات نجد أن فراغ العينة هو :

$$E = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} \Rightarrow |E| = 8$$

القيم الممكنة للمتغير العشوائي X (عدد مرات ظهور الصورة) هي : **x=0,1,2,3** وبالتالي فإن الاحتمالات الممكنة لقيم المتغير العشوائي تكون كالتالي :

$$P(X = 0) = P(TTT) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = P(HTT) + P(THT) + P(TTH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = P(HHT) + P(HTH) + P(THH) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = P(HHH) = \frac{1}{8}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو :

X	0	1	2	3	$\sum P(X = x_i)$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ويحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري كما يلي :

X	0	1	2	3	المجموع
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$x_i . P(X = x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2}$
$x_i^2 . P(X = x_i)$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8}$

أ- حساب التوقع الرياضي :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P(X = x_i) = \frac{3}{2}$$

ب - حساب التباين :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . P(X = x_i) - \mu^2 = \frac{24}{8} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = 0.75$$

ج - حساب الانحراف المعياري :

$$\sigma_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} = 0.86$$

2- باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين :

- بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات P= P(H) = 1/2 ،q=1-P=1/2، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم : n=3،
فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين $X \rightarrow B(3,0.5)$ الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X=x)=C_3^x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \quad X=0,1,2,3$$

$$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{3-0}=\frac{1}{8}$$

$$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3}=\frac{1}{8}$$

ومنه التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير هو :

X	0	1	2	3	$\sum P(X=x_i)$
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ويحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري كما يلي :

أ- توقع التوزيع (الوسط الحسابي) :

$$E(X)=n.p=3.\frac{1}{2}=.\frac{3}{2}$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q=3.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{4}=0.75$$

جـ - الانحراف المعياري :

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.75}=0.86$$

وهي نفس النتائج السابقة .

3- المقارنة بين الحلين :

بالمقارنة بين الحلين (1) و (2) نجد أن الحسابات باستخدام دالة الكتلة الاحتمالية أسهل ولا تحتاج لتحديد نقاط فضاء العينة وخاصة عندما يكون فضاء العينة كبير جدا فلو كانت التجربة العشوائية هي رمي عملة متزنة 10 مرات فإن عدد نقاط العينة في هذه الحالة هو $2^{10}=1024$ نقطة وتصبح الحسابات باستخدام نقاط فضاء العينة شبه مستحيلة وعرضة

للأخطاء بينما طريقة استخدام دالة الكتلة الاحتمالية لتوزيع ذي الحدين يتطلب التعويض مباشرة في صيغة رياضية بسيطة وكذلك الحال في حساب التوقع والتباين.

مثال 03 : ألقي حجر نرد 7 مرات، نفرض أن النجاح هو الحصول على الرقم 5 أو 6 في أي رمية، أحسب :

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط ؟

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة ؟

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل ؟

4- أحسب التوقع والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

- بما أن احتمال النجاح ثابت في كل المحاولات p = p(5,6) = 1/3، q=1-p=2/3، وبما أنه كذلك عدد المحاولات معلوم : n=7، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$P(X=x)=C_7^x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{7-x}\quad X=0,1,2,3,4,5,6,7$$

1- احتمال الحصول على 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط :

$$P(X=3)=C_7^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{7-3}=35\times 0.037\times 0.197=0.256$$

2- احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 في أي مرة :

$$P(X=0)=C_7^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{7-0}=\left(\frac{2}{3}\right)^7=(q)^7=0.0585$$

3- احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل :

$$P(X\geq 1)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=7)=1-P(X=0)=1-C_7^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{7-0}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^7$$
$$=1-(q)^7=1-0.0585=0.9414$$

4- حساب :

أ- توقع التوزيع (الوسط الحسابي) :

$$E(X)=n.p=7.\frac{1}{3}=2.33$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q=7.\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=1.55$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1.55}=1.24$$

ثالثا : توزيع بواسون

1- التعريف : هو توزيع منفصل يستخدم في حالة الأحداث المستقلة ويهتم بالحوادث النادرة، وكذا الأحداث التي تحدث في فترة زمنية أو مكانية محددة، مثل : الحرائق في إحدى المدن، الزلازل، الحوادث على إحدى الطرق، الأخطاء المطبعية في إحدى صفحات كتاب، ... الخ . ويعطينا احتمال عدد مرات ظهور هذه الحوادث النادرة .

فإذا كانت (X) ترمز لعدد مرات ظهور حادثة نادرة، فإن الدالة الاحتمالية للتوزيع تكون:

$$P(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad ; \quad x=0,1,2,.......,\infty$$

متوسط التوزيع : $\mu=\lambda$ e = 2.718 (مقدار ثابت) : ونكتب اختصارا $X \to P(\lambda)$

ويتحدد هذا التوزيع بمعرفة المتوسط λ. وحتى يكون هذا التوزيع احتماليا ، لابد أن يكون :

$$\sum P(x)=\sum\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=1$$

2- الخصائص العددية لتوزيع بواسون :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=\lambda$$

ب- التباين :

$$V(X)=\lambda$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}$$

مثال 04 : إذا كان معدل حالات الطوارئ في إحدى المستشفيات هو 5 كل يوم، فما احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام ؟

الحل :

بما أن حالات الطوارئ هو حدث نادر ومرتبط بفترة زمنية معينة، فإن المتغير العشوائي لحالات الطوارئ يتبع توزيع بواسون حيث : $\lambda=5$ وتكون دالته الاحتمالية كما يلي :

$$P(X=x_i)=\frac{e^{-5}(5)^{x_i}}{x_i!}$$

- احتمال حدوث حالتي طوارئ في أحد الأيام :

$$P(X=2)=\frac{e^{-5}(5)^2}{2!}=0.084$$

ملاحظة : تجدر الاشارة إلى أن توزيع ذو الحدين يمكن أن يقرب لتوزيع بواسون بحيث تكون $\lambda=np$ وذلك عندما تكون nكبيرة، ويكون p قريب من الصفر (أي أن q=1-p قريب من 1)،بينما [n>30,np<5 or n(1-p)<5] ، وعليه فإننا نعتبر هذا الحدث نادرا، ويكون التوزيع الثنائي قريبا جدا من التوزيع البواسوني الذي يمكن استخدامه كتقريب ممتاز للتوزيع الثنائي.

مثال 05 : إذا كان 2 من بين كل 100 مصباح في إنتاج أحد المصانع معيب، في عينة من 500 مصباح تم إنتاجها بالمصنع خلال أحد الأيام أوجد :

1- احتمال وجود ولا مصباح معيب في العينة؟

2- احتمال وجود مصباح معيب في العينة ؟

3- احتمال وجود مصباحين معيبين في العينة على الأقل ؟

4- القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

بما أن احتمال وجود مصباح معيب هو حدث نادر يحدث في فترة زمنية أو مكانية معينة، واحتمال وقوعه ضعيف جدا $p=\frac{2}{100}=0.02\leq 0.05$ ، و n كبيرة $(n\geq 30)$ فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda=\mathrm{np}=500.\frac{2}{100}=10$.وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}=\frac{e^{-10}(10)^x}{x!}\qquad x=0,1,2,3,\dots,500$$

1- حساب احتمال وجود ولا مصباح معيب في العينة :

$$P(X=0)=\frac{e^{-10}(10)^0}{0!}=e^{-10}=0.0000454$$

2- حساب احتمال وجود مصباح معيب في العينة :

$$P(X=1)=\frac{e^{-10}(10)^1}{1!}=10.e^{-10}=0.000454$$

3- حساب احتمال وجود مصباحين على الأقل معيبين :

$$\begin{aligned}P(X\geq 2)&=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=500)=1-P(X<2)\\&=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-(0.0000454+0.000454)=0.9995\end{aligned}$$

4- حساب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لهذا التوزيع :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X) = \lambda = 10$$

ب- التباين :

$$V(X) = \lambda = 10$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\lambda} = \sqrt{10} = 3.16$$

رابعا : التوزيع الهندسي

1- التعريف : التوزيع الهندسي شبيه بالتوزيع الثنائي من حيث الشروط ، حيث يخص الحوادث الخاضعة لتوزيع برنولي مكررة n مرة ، إلا أننا لا نهتم بعدد حالات تكرار النجاح أو الفشل في التجربة، بل يتعلق الأمر بأول مرة يتحقق فيها نجاح التجربة بعد عدد من المحاولات.

لنأخذ المثال التالي للتوضيح : نرمي قطعة نقدية إلى أن نحصل على صورة. احتمال أن يتطلب ذلك 5 رميات مثلا هو:

P(X= 5) = P(PPPPF)

نعود من جديد إلى تجربة برنولي وهذه المرة نكرر التجربة إلى غاية الحصول على النتيجة أو الحدث المطلوب (نجاح مرة واحدة). المتغيرة العشوائية X التي تمثل عدد مرات تكرار التجربة (بما فيها المرة التي حصل فيها النجاح) تتبع التوزيع الهندسي.

ونكتب اختصارا $X \rightarrow G(\mathrm{p.q})$.

إذا رمزنا لاحتمال النجاح بـ p ولاحتمال الفشل بـ q فإن احتمال أي قيمة لـ X في حالة التوزيع الهندسي يعبر عنها بدالة الاحتمال كما يلي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{p.q}^{x-1} \qquad x = 1,2,3,\dots,\infty$$

2- الخصائص العددية للتوزيع الهندسي :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \mu = \frac{1}{P}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{P}^2}$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{P}^2}}$$

مثال 06 :

نرمي زهرة نرد متوازنة إلى غاية الحصول على رقم يقبل القسمة على 2، أحسب احتمال أن يتطلب ذلك 05 رميات ؟ ثم أحسب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

بما أن التجربة تتكرر عدة مرات و X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات للحصول على رقم يقبل القسمة على 2، وبما أن عدد المحاولات غير معلوم، واحتمال النجاح ثابت $P = 0.5$ (أي أن احتمال الفشل كذلك ثابت $q= 0.5$)، فإن X يتبع التوزيع الهندسي، وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\mathrm{p}.\mathrm{q}^{x-1}=(0.5)(0.5)^{x-1} \qquad x=1,2,3,\dots,\infty$$

1- حساب احتمال أن يتطلب الحصول على رقم يقبل القسمة على 2 خمس رميات :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=(0.5)(0.5)^{5-1}=0.059049$$

2- حساب :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X)=\frac{1}{\mathrm{p}}=\frac{1}{0.5}=2$$

ب- التباين :

$$V(X)=\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}^2}=\frac{0.5}{(0.5)^2}=2$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{2}=1.41$$

مثال 07 : يحتوي صندوق على 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء، نقوم بسحب كرة واحدة مع الإعادة من هذا الصندوق فإذا عرفنا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء.

المطلوب:

1- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

2- أحسب احتمال أن يتطلب الحصول على كرة خضراء :

أ – خمس محاولات ؟ ب – سبع محاولات ؟

3- إنطلاقا من تحديد قانون التوزيع الخاص بهذا المتغير، أوجد كل من التوقع الرياضي و التباين والانحراف المعياري ؟

الحل:

1- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

من شروط التجربة هو سحب كرة واحدة مع تسجيل إن كانت خضراء أم حمراء، وهذه التجربة تشبه تجربة بيرنولي، وبما أن التجربة تتكرر عدة مرات و X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء (هنا عدد المحاولات غير معلوم واحتمال نجاح التجربة ثابت أي احتمال الحصول على كرة خضراء $P(V) = \frac{3}{8}$ بينما احتمال الفشل هو احتمال الحصول على كرة حمراء $P(R) = \frac{5}{8}$ وعليه فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي، حيث تكون دالته الاحتمالية على النحو التالي :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{p.q}^{x-1} = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1} \qquad x = 1,2,3, \dots, \infty$$

2- حساب احتمال أن يتطلب الحصول على كرة خضراء :

أ- خمس محاولات :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{5-1} = 0.05722$$

ب- سبع محاولات :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{7-1} = 0.02235$$

3- حساب :

أ- التوقع الرياضي (الوسط الحسابي) :

$$E(X) = \frac{1}{\mathrm{p}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{8}\right)} = 2.666$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{p}^2} = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = 4.444$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4.44} = 2.108$$

خامسا : التوزيع فوق الهندسي

1- التعريف : عند دراستنا للتوزيع الثنائي يتضح لنا أن عمليات السحب لتكوين العينة كانت تتم مع إعادة العنصر المسحوب إلى المجتمع، وهذا يترتب عنه أمران، يعتبران بمثابة شرطي تطبيق التوزيع الثنائي، هما :

- أن جميع السحبات (أو التجارب) مستقلة عن بعضها البعض.

- أن احتمال النجاح في تجربة واحدة p ثابت.

لكن هناك بعض الحالات لا يمكن أن يتم فيها السحب مع الإعادة (كإجراء فحص حول الإصابة بمرض معين) وهنا يختل شرطا تطبيق التوزيع الثنائي (استقلال التجارب، وثبات p) فنلجأ إلى تطبيق قانون آخر يسمى قانون فوق الهندسي.

وعليه فإن احتمال عدد ما X من النجاحات من بين n تجربة برنولية غير مستقلة يحسب وفق قانون التوزيع الاحتمالي الذي يعرف بفوق الهندسي التالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n} \quad X=0,1,2,3,\dots,n \qquad n=1,2,3,\dots$$

ونكتب اختصارا : $X \to H(N,N_1,n)$

حيث :

x : يمثل عدد مرات النجاح

N: حجم المجتمع

N_1: حجم المجتمع الذي تتوفر فيه الخاصية المدروسة

N_2: حجم المجتمع الذي لا تتوفر فيه الخاصية المدروسة

n : عدد التجارب (حجم العينة).

وبالتالي فإن شروط استخدام قانون توزيع فوق الهندسي هي :

أ- تجربة برنولية مكررة عدد محدد من المرات n؛

ب – السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة؛

ج- احتمال النجاح في التجربة غير ثابت (تجارب غير مستقلة).

2- الخصائص العددية للتوزيع فوق الهندسي :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p$$

ب- التباين :

$$V(X) = n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}$$

مثال 08 : ليكن لدينا صندوق يحتوي على 5 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء، نسحب بدون ارجاع كرية واحدة 3 مرات

1- ما هو احتمال أن تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء باستعمال قانون الاحتمالات المركبة وباستعمال قانون التوزيع الاحتمالي ؟

2- ما هو احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثلاثة المسحوبة ؟

3- ما هو احتمال الحصول على كريتين بيضاء على الأقل من الكريات الثلاثة المسحوبة ؟

4- أحسب التوقع والانحراف المعياري لهذا التوزيع ؟

الحل :

الملاحظ في هذا المثال هو أن السحب بدون إرجاع.

1- حساب احتمال أن تكون كل الكريات الثلاثة المسحوبة بيضاء :

- نستعمل الطريقة الأولى : (الاحتمالات المركبة)

إذا اعتبرنا أن : A_1 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الأول ، A_2 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثاني، A_3 حادثة سحب كرية بيضاء في السحب الثالث.

فالإجابة عن السؤال هو حساب احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية والثالثة كذلك بيضاء، ونستعمل قانون الاحتمالات المركبة :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) * P(A_2/A_1) * P(A_3/A_1 \cap A_2) = \frac{5}{8} * \frac{4}{7} * \frac{3}{6} = \frac{60}{336} = \frac{5}{28}$$

- نستعمل الطريقة الأولى : (الاحتمالات المركبة)

بما أن التجربة برنولية (مكررة 3 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت السحب بدون ارجاع (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الكريات البيضاء المسحوبة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \to H(8{,}5{,}3)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_5^x.C_3^{3-x}}{C_8^3} \qquad X=0{,}1{,}2{,}3 \qquad n=3$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3.C_3^{3-3}}{C_8^3}=\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى .

2- حساب احتمال الحصول على كرية واحدة بيضاء من بين الكريات الثلاثة المسحوبة :

$$P(X=1)=\frac{C_5^1.C_3^{3-1}}{C_8^3}=\frac{15}{56}$$

3- حسب احتمال الحصول على كريتين بيضاء على الأقل من الكريات الثلاثة المسحوبة :

$$P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{C_5^2.C_3^{3-2}}{C_8^3}+\frac{C_5^3.C_3^{3-3}}{C_8^3}=\frac{30}{56}+\frac{10}{56}=\frac{40}{56}=\frac{5}{7}$$

4- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p=3.\frac{5}{8}=\frac{15}{8}=1.875$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=3.\frac{5}{8}.\frac{3}{8}\left(\frac{8-3}{8-1}\right)=\frac{225}{448}=0.5022$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}=\sqrt{0.5022}=0.7086$$

مثال 09 : تتكون لجنة التنظيم في أحد المسابقات الوطنية الجامعية لاختيار أحسن مؤسسة ناشئة من 4 ذكور و7 إناث، سحبنا بصورة عشوائية لجنة مؤلفة من أربعة أشخاص لاختيار أحسن مشروع في النهائيات، نفرض أن X المتغير العشوائي الذي يعبر عن اختيار الذكور.

المطلوب : 1- أكتب قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي ؟

2- أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

1- كتابة قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي :

بما أن التجربة برنولية (مكررة 4 مرات)، احتمال النجاح غير ثابت (التجارب غير مستقلة)، فإن المتغير X (عدد الذكور في اللجنة) يتبع التوزيع فوق الهندسي بالمعلمات : $X \to H(11,4,4)$ وتكون دالته الاحتمالية كالتالي :

$$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^{x}.C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_4^x.C_7^{4-x}}{C_{11}^4} \qquad X=0,1,2,3,4 \qquad n=4$$

$$P(X=0)=\frac{C_4^0.C_7^{4-0}}{C_{11}^4}=0.106 \quad ,P(X=1)=\frac{C_4^1.C_7^{4-1}}{C_{11}^4}=0.424 \quad ,P(X=2)=\frac{C_4^0.C_7^{4-2}}{C_{11}^4}=0.38$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3.C_7^{4-3}}{C_{11}^4}=0.0848 \qquad ,P(X=4)=\frac{C_4^4.C_7^{4-4}}{C_{11}^4}=0.003$$

ويمكن تلخيص التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X في الجدول التالي :

X	0	1	2	3	4	∑
P(x)	0.106	0.424	0.38	0.0848	0.03	1

2- حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\mu=n.\frac{N_1}{N}=n.p=4.\frac{4}{11}=\frac{16}{11}=1.45$$

ب- التباين :

$$V(X)=n.p.q\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=4.\frac{4}{11}.\frac{7}{11}\left(\frac{11-4}{11-1}\right)=0.64$$

ج - الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{n.p.q(\frac{N-n}{N-1})}=\sqrt{0.64}=0.8$$

مثال 10 : (مهم لكيفية التميز بين التوزيعات الاحتمالية)

حدد طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي الموافق للحالات المدروسة التالية، مع التعليل :

1- في مصنع لإنتاج الأجهزة الكهرومنزلية من نوع كوندور، يتم مراقبة الأجهزة الغير صالحة للإنتاج اليومي والمقدر بـ 500 وحدة من أجهزة التلفاز.

2- إجابة طالب (ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الإحصاء 03 .

3- إذا كان 10 % من الطلبة في إحدى الكليات أعسريين (أيسريين)، وطلب من أحد الممولين بالكراسي بأن يضع في كل قاعة دراسية كراسي خاصة بالأعسريين، وكان تعداد الطلبة بالقاعة 02 هو 20 طالب.

4- إجابة طالب (ة) على السؤال الشفوي للأستاذ أثناء المحاضرة.

5- يتلقى مستقبل المكالمات بقسم الطوارئ بمستشفى الزهراوي بولاية المسيلة 5 مكالمات في المتوسط خلال ساعة ما.

6- في مسابقة جهوية للنجاح للحصول على منحة التكوين الإقامي بالخارج يخفق 2 طلبة من بين 100، تقدم للمشاركة في المسابقة هذا العام 500 طالب.

7- في محاولة للحصول على التأشيرة الأوروبية تمكن أحد طالبي التأشيرة من الحصول عليها لأول مرة سنة 2020 بعد 5 محاولات.

8- نرمي زهرة نرد ونبحث عن عدد المحاولات للحصول على الرقم 6.

9- سجل في مركز التعليم المكثف للغات بجامعة المسيلة لهذا العام 500 طالب، من بينهم 350 طالبة و150 طالب، علما أن المركز يستطيع قبول 200 طالب فقط لهذا العام.

10- فوج من الطلبة مكون من 20 طالب و15 طالبة، تم اختيار لجنة من 4 طلبة بشكل عشوائي ودفعة واحدة لتمثيل الفوج في مجلس الإدارة، ونريد معرفة عدد الذكور في اللجنة.

الحل :

يتم تحديد طبيعة قانون التوزيع الاحتمالي الموافق للحالات المشار إليها في هذا التمرين على النحو المبين في الجدول التالي :

الرقم	الحالات المدروسة	نوع التوزيع	التعليل
01	في مصنع لإنتاج الأجهزة الكهرومنزلية من نوع كوندور، يتم مراقبة الأجهزة الغير صالحة للإنتاج اليومي والمقدر بـ 500 وحدة من أجهزة التلفاز.	ثوزيع ثنائي الحدين	- تجربة متكررة عدة مرات (التلفزيونات) - لكل اختبار نتيجتين فقط (التلفاز صالح أو غير صالح) - احتمال التحقق ثابت من عملية إلى أخرى (احتمال أن يكون المصباح غير صالح) - النتائج مستقلة (مراقبة التلفاز الأول مستقل عن الثاني وهكذا)
02	إجابة طالب (ة) على أسئلة ورقة الامتحان في مقياس الإحصاء 03 .	ثوزيع ثنائي الحدين	- تجربة متكررة عدة مرات (تعدد الاسئلة) - لكل اختبار نتيجتين فقط (إجابة صحيحة أو خاطئة) - احتمال الإجابة الصحيحة ثابت في كل سؤال - النتائج مستقلة (الإجابة عن السؤال الأول مستقل عن الثاني وهكذا)
03	إذا كان 10 % من الطلبة في إحدى الكليات أعسريين (أيسريين)، وطلب من أحد المولين بالكراسي بأن يضع في كل قاعة دراسية كراسي خاصة بالأعسريين، وكان تعداد الطلبة بالقاعة 02 هو 20 طالب.	ثوزيع ثنائي الحدين	- تجربة متكررة عدة مرات (عدد الطلبة) - لكل اختبار نتيجتين فقط (طالب أعسر أو غير أعسر) - احتمال النجاح ثابت من عملية إلى أخرى (احتمال أن يكون الطالب أعسر) - النتائج مستقلة (كل طالب مستقل عن الآخر)
04	إجابة طالب (ة) على السؤال الشفوي للأستاذ أثناء المحاضرة.	توزيع بيرنولي	- التجربة متكررة مرة واحدة فقط (سؤال واحد) - النتيجة ثنائية، إما صحيحة أو خاطئة.
05	يتلقى مستقبل المكالمات بقسم الطوارئ بمستشفى الزهراوي بولاية المسيلة 5 مكالمات في المتوسط خلال ساعة ما.	توزيع بواسون	- إعتبار الحدث نادر وارتباطه بعنصر الزمن : متوسط عدد المكالمات في الساعة الواحدة.
06	في مسابقة جهوية للنجاح للحصول على منحة التكوين الإقامي بالخارج يخفق 2 طلبة من بين 100، تقدم للمشاركة في المسابقة هذا العام 500 طالب.	توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي	- تجربة متكررة بعدد كبير جدا (500 طالب) - النتيجة ثنائية، إما أن يخفق الطالب أو أن ينجح في المسابقة. - إحتمال النجاح ثابت. - النتائج مستقلة (كل طالب مستقل عن الآخر). - بما أن n كبيرة و P صغيرة، فإننا نستخدم توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي.
07	في محاولة للحصول على التأشيرة الأوروبية تمكن أحد طالبي التأشيرة من الحصول عليها لأول مرة سنة 2020 بعد 5 محاولات.	التوزيع الهندسي	- تعدد المحاولات. - إستقلالية التجارب. - الاهتمام بتحقق الحدث لأول مرة.
08	نرمي زهرة نرد ونبحث عن عدد المحاولات للحصول على الرقم 6.	التوزيع الهندسي	- تعدد المحاولات. - إستقلالية التجارب. - الاهتمام بتحقق الحدث لأول مرة.

09	سجل في مركز التعليم المكثف للغات بجامعة المسيلة لهذا العام 500 طالب، من بينهم 350 طالبة و150 طالب، علما أن المركز يستطيع قبول 200 طالب فقط لهذا العام.	التوزيع فوق الهندسي	- تجربة مكررة عدد محدد من المرات n. - السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة (تجارب غير مستقلة).
10	فوج من الطلبة مكون من 20 طالب و15 طالبة، تم اختيار لجنة من 4 طلبة بشكل عشوائي دفعة واحدة لتمثيل الفوج في مجلس الإدارة، ونريد معرفة عدد الذكور في اللجنة.	التوزيع فوق الهندسي	- تجربة مكررة عدد محدد من المرات n. - السحب يكون دون إرجاع ودفعة واحدة (تجارب غير مستقلة).

سادسا : ملخص أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

اسم ورمز القانون	طبيعة المتغير X	صيغة القانون	التوقع E(X)	التباين V(X)
برنولي	X متغير عشوائي منفصل يعكس نتائج تجربة برنولي ويأخذ القيمتين 0 أو 1 (1 يعني أن نتيجة التجربة هي النتيجة التي تهمنا أي نجاح، و0 يعني أن النتيجة لا تهمنا أي فشل)	$P(X=x)=p^x q^{1-x}$ X= 0,1	P	p.q
ثنائي الحدين	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة مستقلة عن بعضها البعض (السحب مع الإرجاع)	$P(X=x)=C_n^x(p)^x(q)^{n-x}$ $X=0,1,2,3,4$	n.p	n.p.q
بواسون	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات تحقق حدث معين خلال فترة زمنية أو مكانية معينة.	$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^x}{x!}$ $x=0,1,2,3,\dots,\infty$	λ	λ
الهندسي	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد المحاولات لتحقق الحدث (النجاح) أول مرة.	$P(X=x)=p.q^{x-1}$ $x=1,2,3,\dots,\infty$	$\frac{1}{P}$	$\frac{q}{P^2}$
فوق الهندسي	X متغير عشوائي منفصل يمثل عدد مرات الحصول على نجاح خلال تكرار تجربة برنولي n مرة غير مستقلة عن بعضها البعض (السحب دون الإرجاع)	$P(X=x)=\frac{C_{N_1}^x . C_{N_2}^{n-x}}{C_N^n}$ $x=0,1,2,3,\dots,n$	$n.\frac{N_1}{N}=n.p$	$n.p.q(\frac{N-n}{N-1})$