CHAPITRE-2
MODELE DE BASE DE PROBABILITE

2.1 Introduction

Ce chapitre introduit les principales notions de l'analyse combinatoire et les modèles de base et les théorèmes de la probabilité. Nous commençons par un rappel sur les notions de base de l'analyse combinatoire (arrangement, permutation, combinaison, etc.) et de la probabilité (événement, expérience, univers, etc.). Ensuite, nous présentons quelques opérations de l'algèbre des événements tels que : la commutativité de l'union et de l'intersection, l'absorption, la distribution de l'union et de l'intersection, l'élément neutre et la complémentation. Enfin, nous illustrons les axiomes et les théorèmes des probabilités (probabilité totale, probabilité conditionnelle, théorème de Bayes, etc.) et l'application de la probabilité dans la fiabilité des systèmes électroniques.

2.2 Rappels sur l'analyse combinatoire

L'analyse combinatoire, qui est une branche des mathématiques, a pour but d'étudier la façon avec laquelle on peut faire un dénombrement des dispositions que l'on peut former à partir des éléments d'un ensemble de cardinal fini. Cette discipline cherche à déterminer comment peut-on compter des objets qui ont des propriétés bien déterminées [4].

2.2.1 Arrangement

Un arrangement A_n^k est toute suite ordonnée de k éléments sélectionné parmi n éléments d'un ensemble *E*. (si $k > n$: $A_n^k = 0$). Deux arrangements sont dits disjoints, s'ils diffèrent par la nature ou l'ordre des objets qui les composent. On distingue deux types : arrangement avec répétition et arrangement sans répétition.

Arrangement avec répétition **:** Lorsqu'un élément peut être observé plusieurs fois (tirage avec remise ; tous les éléments de *k* ont *n* possibilités d'arrangements) [5].

Pour : $1 \leq k \leq n$ et $n, k \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n^k = n^k \tag{2.1}$$

Exemple-1 **:** Quel est le nombre de dinucléotides (2 nucléotides), dans une séquence d'ADN composée de 3 nucléotides {A(Adénine), C(Cytosine), G(Guanine)}, sachant qu'un élément peut être observé plusieurs fois ?

Solution **:**

On a ; $n = 3$ et $k = 2$

$$A_3^2 = 3^2 = 9$$

AA	AC	AG
CA	CC	CG
GA	GC	GG

Arrangement sans répétition **:** Lorsque tous les éléments sont différents (arrangement au sens strict) (tirage sans remise ; le premier élément de k a n possibilités d'arrangements or le deuxième n'a que $(n - 1)$ possibilités et de même pour les éléments suivants) [5].

Pour : $1 \leq k \leq n$ et $n, k \in \mathrm{N}^*$:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{2.2}$$

Exemple-2 **:** Quel est le nombre de dinucléotides (2 nucléotides), dans une séquence d'ADN composée de 3 nucléotides {A(Adénine), C(Cytosine), G(Guanine)}, sachant qu'un élément n'est observé qu'une seule fois ?

Solution **:**

On a ; $n = 3$ et $k = 2$

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

~~AA~~	AC	AG
CA	~~CC~~	CG
GA	GC	~~GG~~

2.2.2 Permutation

Pour un ensemble E composé de n éléments, une permutation P_n est toute suite ordonnée de n éléments dans E. On distingue deux types de permutation : permutation avec répétition et permutation sans répétition [6].

Permutation avec répétition **:** Lorsqu'on a des éléments qui peuvent être observés k_i fois ; k_1= Nbre de fois du 1er élément, k_2= Nbre de fois du 2ème élément, etc. [5].

$$P_n = A_n^k = \frac{n!}{k_1! \times k_2! \times \ldots \times k_i!} = n! \tag{2.3}$$

Exemple-4 **:** Quel est le nombre de mots possible qui peut être composé en permutant les lettres {C, A, L, C, U, L, C} ?

***Solution* :**

On a : $k_C = 3$ fois et $k_L = 2$ fois.

$$P_7 = \frac{7!}{3! \times 2!} = 420 \text{ mots possibles.}$$

***Permutation sans répétition* :** C'est un cas particulier d'arrangement sans répétition de k éléments tiré parmi n éléments avec $k = n$:

$$P_n = A_n^k = A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = n! \qquad (2.4)$$

***Exemple-3* :** Quel est le nombre de mots qui peuvent être composé en permutant les lettres {a,b,c} ?

***Solution* :**

$P_3 = 3! = 6$ Ces permutations sont : abc, acb, bac, bca, cab, cba.

2.2.3 Combinaison

Pour un ensemble donné E composé de n éléments, une combinaison C_n^k est un sous-ensemble de k éléments parmi n éléments, dont l'ordre n'est pas considéré [4]. (Pour : $k > n$: $C_n^k = 0$). On distingue deux types de combinaisons ; combinaison avec répétition et combinaison sans répétition.

***Combinaison avec répétition* :** Est toute combinaison non-ordonnée avec répétition éventuelle formée de k éléments pris parmi n éléments de E [6].

$$C_{n+k-1}^k = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \qquad (2.5)$$

***Exemple-4* :** Quel est le nombre de combinaisons avec répétition pour former un mot de 3 lettres parmi 5 de l'alphabet ?

***Solution* :**

On a 3 possibilités : Mots de 3 lettres différentes (C_5^3), mots de 2 lettres différentes et 1 lettre identique ($2 \times C_5^2$), mots de 3 lettres identiques (C_5^1).

Le nombre total de combinaisons est : $C_5^3 + 2 \times C_5^2 + C_5^1 = (C_5^3 + C_5^2) + (C_5^2 + C_5^1)$

En utilisant les formules de Pascal : $\begin{cases} C_5^3 + C_5^2 = C_6^3 \\ C_5^2 + C_5^1 = C_6^2 \end{cases}$

On aura : $C_5^3 + 2 \times C_5^2 + C_5^1 = C_6^3 + C_6^2 = C_7^3 = 35$ mots

On constate que pour : $\boldsymbol{k} = 3$ & $\boldsymbol{n} = 5 \Rightarrow C_{n+k-1}^k = C_{5+3-1}^3 = C_7^3$

Combinaison sans répétition **:** Est toute combinaison non-ordonnée de *k* éléments distincts deux à deux pris parmi les *n* éléments de *E* [4] [5].

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \tag{2.6}$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \tag{2.7}$$

Exemple-5 **:** Quel est le nombre de combinaisons sans répétition pour former un sous-groupe de 4 étudiants parmi 28 étudiants ?

Solution **:**

On a : $C_{28}^4 = \binom{28}{4} = \frac{28!}{4!(28-4)!} = \frac{28 \times 27 \times 26 \times 25}{4 \times 3 \times 2} = 20475$

2.3 Notions fondamentales de probabilité

2.3.1 Expérience (Epreuve) aléatoire

Une épreuve (expérience) aléatoire est un processus, matérialisé par une expérience parfaitement décrite, destiné à générer de façon aléatoire à chaque expérimentation les éléments d'un ensemble connu a priori. Les résultats de ces expériences ne sont pas connus par avance. (i.e. : Lancer de deux dés (six faces chacun) ou lancer d'une pièce de monnaie trois fois successives) [6].

2.3.2 Espace

Un espace (appelé aussi univers, clan ou espace des événements élémentaires) souvent noté ; *Ω*, *E*, *U*, ou *S* est l'ensemble de toutes les résultats qui peuvent être obtenues au cours d'une épreuve aléatoire [4].

Un espace est dit **fondamental** si chacun de ses résultats possède les mêmes chances d'apparaissions que les autres. (i.e. : Le résultat de lancer d'un dé régulier (1/6), ou d'une pièce de monnaie (1/2)). Les résultats de ces épreuves sont comme suit : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $E = \{p, f\}$.

2.3.3 Événement

Un événement, qui est une affirmation du résultat d'une épreuve aléatoire, est un sous-ensemble de l'espace des évènements. Un événement, qui est noté généralement par A, B, C, etc., est réalisé lorsque le résultat obtenu est l'une de ses possibilités [5] [6].

***Exemple-6* :** Soit les évènements A et B de Ω tels que ;

A = "Obtenir un nombre impair" et B = "obtenir un nombre pair".

- $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$; A est réalisé si le résultat obtenu est un nombre impair.
- $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$; B est réalisé si le résultat obtenu est un nombre pair.

2.3.4 Événements particuliers

***Événement élémentaire* :** C'est un sous-ensemble de l'espace ne contenant qu'un seul élément. Ainsi, on a autant d'événements élémentaires que d'éléments dans l'espace (i.e. les évènements élémentaires de l'espace E précédent sont : $\{f\}$ et $\{p\}$).

***Événement certain* :** C'est l'ensemble de toutes les possibilités (l'espace des évènements). Il est appelé évènement certain car il est toujours réalisé.

***Événement impossible* :** C'est un événement qui n'a aucune possibilité de se réaliser. Il correspond à l'ensemble Ø.

***Événements compatibles* :** Ce sont deux évènements qui peuvent être réalisés en même temps :

$$A \cap B \neq \emptyset \tag{2.8}$$

***Événements incompatibles* (*disjoints*) :** Ce sont deux évènements qui ne peuvent être réalisés simultanément :

$$A \cap B = \emptyset \tag{2.9}$$

2.4 Algèbre des événements [5] [6]

On considère trois événements A, B et C de l'espace Ω. Les propriétés suivantes sont valables :

2.4.1 Commutativité de l'union et de l'intersection

Les propriétés de l'intersection et celles de l'union sont dites similaires (ou duales), car on obtient les unes des autres en remplaçant le signe de l'union par celui de l'intersection. L'intersection (ou l'union) de deux événements ne dépend pas de l'ordre dans lequel ces deux événements sont pris. On a donc ;

$$A \cup B = B \cup A \tag{2.10}$$

L'évènement A ou l'évènement B est réalisé.

$$A \cap B = B \cap A \tag{2.11}$$

L'évènement A et l'évènement B sont réalisés.

2.4.2 Distribution de l'union et de l'intersection

L'intersection de l'union de deux événements avec un troisième événement est égale à l'union de l'intersection de chacune des événements avec le troisième événement :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{2.12}$$

L'union de l'intersection de deux événements avec un troisième événement est égale à l'intersection de l'union de chacune des événements avec le troisième événement :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{2.13}$$

2.4.3 Absorption

L'inclusion d'un évènement B dans l'évènement A signifié que la réalisation de l'évènement B implique la réalisation de A. On a donc :

$$\forall\, B \subset A, \Rightarrow A \cap B = B \tag{2.14}$$

2.4.4 Elément neutre et complémentation

L'évènement $\bar{A}$ est dit complémentaire (contraire) de A, si la réalisation de l'un implique la non-réalisation de l'autre. On a donc les relations suivantes :

$$\bar{\bar{A}} = A \tag{2.15}$$

$$A \cup \bar{A} = \bar{A} \cup A = \Omega \tag{2.16}$$

$$A \cap \bar{A} = \bar{A} \cap A = \emptyset \tag{2.17}$$

$$\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}} \tag{2.18}$$

$$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}} \tag{2.19}$$

2.5 Théorèmes de probabilité

Le passage d'une description des phénomènes aléatoires à l'élaboration d'un modèle mathématique se fait en introduisant les théorèmes de probabilité.

2.5.1 Définition et axiomes

Dans une épreuve aléatoire donnée, la probabilité $P(A)$ est toute application de l'espace des évènements Ω dans l'intervalle $[0,1]$, qui associe à chaque évènement A de Ω, un nombre $P(A)$ tel que [6] :

$$\mathrm{A} \mapsto P\,(\mathrm{A}) : \mathrm{P(A)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} \tag{2.20}$$

et satisfait les axiomes suivantes :

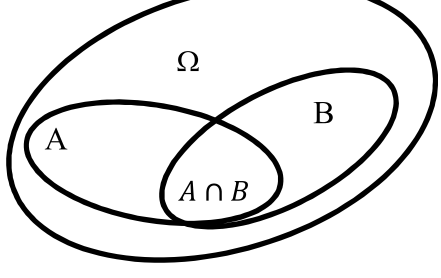
Axiome (1) : $\forall\, \mathrm{A} \in \Omega \Rightarrow P(\mathrm{A}) \geq 0$ (2.21)

Axiome (2) : $P\,(\Omega) = 1$ (2.22)

Axiome (3) : $\forall\, \mathrm{A, B} \in \Omega$: si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset \Rightarrow P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B})$ (2.23)

2.5.2 Théorème de probabilité conditionnelle

Théorème : Soit deux évènements A et B de l'espace Ω avec $P(\mathrm{B}) \neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P_B(\mathrm{A})$, le rapport donné par l'équation (2.24) suivante [5] :



$$P(A|B) == \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2.24)$$

***Exemple-7* :** Un étudiant estime ses chances de réussir le module de Sécurité et d'Avant-Projet à 65% et à 80% respectivement. Il estime aussi que ses chances de réussir les deux modules en même temps sont à 50%. Quelle est la probabilité que cet étudiant réussisse en Sécurité sachant qu'il a réussi le module d'Avant-Projet ?

Solution :

Notons les évènements suivants ; S = "Réussir en Sécurité", A = "Réussir en Avant-Projet" et $(A \cap B)$=" Réussir les deux modules".

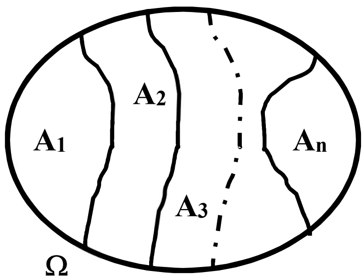
On a : $\mathrm{P(S)} = 0{,}65$, $\mathrm{P(A)} = 0{,}80$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}5$.

D'où : $P(S|A) == \frac{P(S \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}625$

Notons que : $P(S|A) < P(S)$.

2.5.3 Théorème de probabilité totale

***Définition* :** On appelle système complet d'évènements, les n évènements (A_1, A_2, … ,A_n), qui forment une partition de Ω, qui sont deux à deux incompatibles et qui leur réunion est l'évènement certain de Ω. (i.e. $(A, \bar{A})$ est un système complet d'évènement) [4].



***Théorème* :**

Si {A_1, A_2, … A_i, … , A_n) est un système complet d'évènements, quel que soit l'évènement B, alors [4] :

$$P(\mathrm{B}) = P\,(B|A_1)P(\mathrm{A_1}) + P\,(B|A_2)P(\mathrm{A_2}) + \ldots + P\,(B|A_n)P(\mathrm{A_n}) \qquad (2.25)$$

D'où :

$$P(\mathrm{B}) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(\mathrm{A}_i) \qquad (2.26)$$

L'équation (2.26) est dite : Formule des probabilités Totales**.**

***Exemple-8* :** Une population comporte 1/3 de mâles et 2/3 de femelles. Le Covid-19 frappe 6% des mâles et 0,36% des femelles. Quelle est la probabilité pour qu'une personne pris au hasard (sexe inconnu) ait le Corona Virus ?

Solution :

On a :

A = {Mâle} et $\bar{A}$ ={Femelle} constitue un système complet d'évènements

B = {Covid-19} et $\bar{B}$ ={non Covid-19}

Ayant : $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})$

$P(B) = (0{,}06 \times \frac{1}{3}) + (0{,}0036 \times \frac{2}{3}) = 0{,}0224$; Soit : 2,24% de la population qui sont Covid-19.

2.5.4 Théorème de Bayes [4] [6]

***Théorème* :**

Si $\{A_1, A_2, \dots A_i, \dots , A_n)$ est un système complet d'évènements, quel que soit l'évènement B tel que $P(\mathrm{B}) \neq 0$, alors :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + \dots + P(B|A_i)P(A_i) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)} \quad (2.27)$$

D'où la Formule de Bayes :

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} \quad (2.28)$$

***Exemple-9* :** Dans une ville 1 habitant sur 100 est atteint d'une maladie chronique A. Lors d'un dépistage, le résultat est positif (T) ou négatif $\bar{T}$. Sachant que : $P(T|A) = 0{,}8$ et $P(\bar{T}|\bar{A}) = 0{,}9$. Un patient étant tester positivement, quelle la probabilité qu'il soit atteint de cette maladie chronique A ? Soit calculer $P_T(A)$ ou $P(A|T)$?

Solution :

D'après le théorème de Bayes on a :

$$P(A|T) = \frac{P(A \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|\bar{A})P(\bar{A})} = \frac{0{,}01 \times 0{,}8}{0{,}8 \times 0{,}01 + 0{,}1 \times 0{,}99} = 0{,}075$$

***Nota* :** La probabilité d'être malade avant le test était $P(A) = 0{,}01$ (probabilité a priori) et après le test est $P(T|A) = 0{,}075$ (probabilité a posteriori). On conclusion, le test ajoute un complément d'information.

2.6 Application de la probabilité dans l'électronique

Dans plusieurs domaines scientifique, sociologique ou médical, on s'intéresse à des phénomènes dont l'effet du hasard est prépondérant. Ces phénomènes sont caractérisés par les résultats des observations qui changent d'une expérience à une autre. Une épreuve est dite « aléatoire » s'il est impossible de prédire son résultat et si, refaite dans des conditions similaires, elle peut donner des résultats différents (i.e. la durée de vie d'un composant, la durée de fonctionnement sans panne d'appareil, etc.). Ci-après, quelques exemples d'application de la probabilité dans le domaine d'électronique [6].

2.6.1 Fiabilité des systèmes

On considère un système formé par plusieurs composants. On s'intéresse à la fiabilité du système : on va chercher à calculer la probabilité que le système fonctionne encore à un instant donné. Il faut pour cela connaître la probabilité que chacun des composants fonctionne à cet instant et tenir compte du fait que les composants ne fonctionnent peut-être pas indépendamment les uns des autres.

2.6.2 Systèmes des Télécommunications

En télécommunications, on doit souvent tenir compte du "bruit" dans les systèmes. Par exemple, supposons qu'un système émet soit un 0, soit un 1, et qu'il y a un risque pour que le chiffre émis soit mal reçu. Il est alors intéressant de calculer la probabilité qu'un 0 ait été émis, sachant qu'un 0 a été reçu, ou encore la probabilité qu'il y ait une erreur de transmission.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de base de l'analyse combinatoire et de probabilité. Ensuite, nous avons présenté les axiomes et les théorèmes de probabilité ; totale, conditionnelle et théorème de Bayes. Enfin, nous avons présenté l'application de la probabilité dans le domaine d'électronique.

Le prochain chapitre, introduira les différents types de systèmes ; série, parallèle et mixte (à configuration symétrique et non symétrique). Enfin, nous virons l'application du théorème de Bayes sur les différentes configurations précédentes.