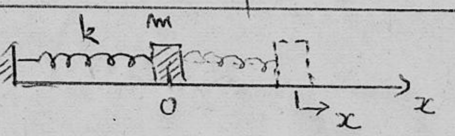
(1)

Solution de la série N° 2 O.V (2023/2024)

Exo1 :

* système mécanique k + m :



L'équation diff du syst pour les oscillations de faibles amplitudes est :

$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ alors la solution est sinusoïdale de type :

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ tel que :

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

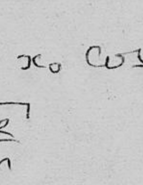
Donc la pulsation propre est

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

par $k = 100\, N m^{-1}$ et $m = 250\, g$

on trouve que : $\boxed{\omega_0 = 20\, rad\, s^{-1}}$

* système électrique Lc :



l'eq diff régissant les vib du circuit Lc est :

$\ddot{i} + \frac{1}{Lc} i = 0$

donc le courant est sinusoïdale de type. $i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

tel que $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ est la pulsation propre du circuit

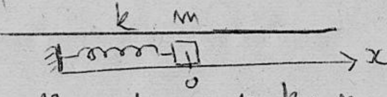
par $L = 0{,}1\, H$ et $C = 100\, pF$ on trouve que $\boxed{\omega_0 = 3{,}16 \cdot 10^5\, rad \cdot s^{-1}}$

(2)

$\Rightarrow (\omega_0)_{éle} \gg (\omega_0)_{méc}$

Conclusion :

les circuits éle possèdent un spectre de fréquences assez large en comparaison avec celui des syst mécaniques.



Exo2

L'éq temporelle du syst k + m est de la forme :

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ d'où :

$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{36}{0{,}01}} = \frac{60}{2\pi}$

$\Rightarrow \boxed{f = 9{,}55\, Hz}$

* calcule de x_0 et φ :

à $t = 0$ nous avons :

$x(0) = 50\, mm$
$\dot{x}(0) = 1{,}7\, m/s$ $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} x_0 \cos\varphi = 5 \cdot 10^{-2} \\ -x_0 \omega_0 \sin\varphi = 1{,}7 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varphi = -\frac{\pi}{6}\, rad \\ x_0 = 57{,}5\, mm. \end{array}}$

* calcul de l'energie :

Le système est conservatif car il n'est soumis à aucune force de frottement.

donc :

$E = T + U = U_{max} = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} 36 \cdot (0{,}0575)^2$

$\simeq \boxed{0{,}06\, J}$

Exo2 (suite) :

L'éq temporelle du second syst est :

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

alors :

$x(0) = x_0 \cos(\varphi + \pi/2) = x_0 \cos(-\pi/6 + \pi/2)$

$= x_0 \cos(\pi/3)$

d'où : $\boxed{x(0) = 28{,}8\ mm}$

$\dot{x}(0) = -x_0 \omega_0 \sin(-\pi/6 + \pi/2) = -2{,}98\ \boxed{\simeq -3\ m/s}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(0) = -3\ m/s}$

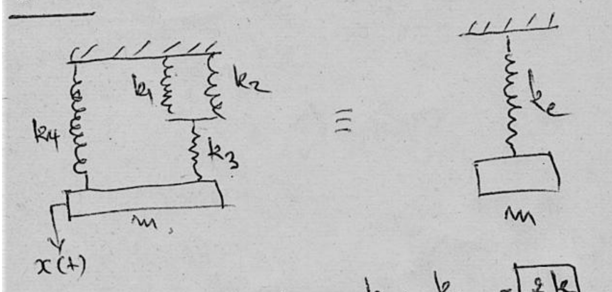
Donc le 2ème syst à $t = 0$ est à 28,8 mm de la position d'⇌ (à droite) et se déplace avec une vitesse de 3 m/s vers la gauche.

* le 2ème syst étant à 28,8 mm de $x = 0$ à $t = 0$, alors il atteind $x = 0$ (la position d'⇌) à l'instant t tel que :

$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \pi/3) = 0 \Rightarrow$

$\omega_0 t + \pi/3 = \pi/2$ d'où $\boxed{t = 0{,}01\ s}$

EX03



$k_1 // k_2 \Rightarrow k_5 = k_1 + k_2 = \boxed{2k}$

k_5 en série avec k_3 alors :

$$\frac{1}{k_6} = \frac{1}{k_5} + \frac{1}{k_3} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{2k}$$

$\Rightarrow \boxed{k_6 = \frac{2}{3}k}$

$k_6 // k_4$ alors

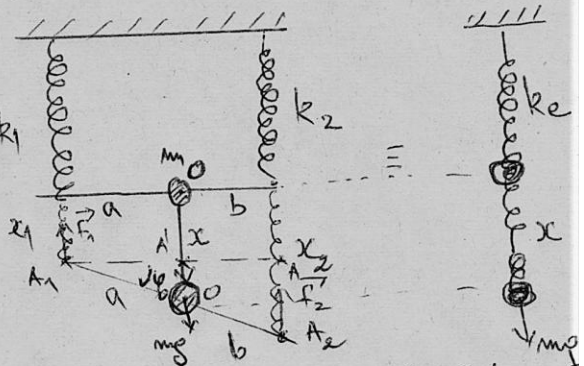
$k_7 = k_6 + k_4 = \frac{2}{3}k + 2k = \frac{8}{3}k$

donc : $\boxed{k_e = k_7 = \frac{8}{3}k.}$

les vib du syst sont semblables aux vib du syst simple équivalent

alors :
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{8k}{3m}} = \boxed{20\, rad\, s^{-1}}$$

EX04



à l'⇌ statique nous avons :

1 - $\sum F_i = 0$

2. $\sum \mathcal{M}_i = 0$

$1 \Rightarrow mg = k_1 x_1 + k_2 x_2 \quad \ldots (1)$

$2 \Rightarrow \vec{OA_2} \wedge \vec{F_2} + \vec{OA_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{OO} \wedge \vec{mg} = 0$

$\Rightarrow b f_2 \cos\varphi_0 - a f_1 \cos\varphi_0 = 0 \Rightarrow$

$a f_1 = b f_2 \Rightarrow \boxed{a k_1 x_1 = b k_2 x_2} \quad \ldots (2)$

à l'⇌ du syst simple équivalent nous avons :

$mg = k_e x \quad \ldots (3)$

(1) et (3) donnent :

$k_e x = k_1 x_1 + k_2 x_2 \quad \ldots (4)$

les deux Δ $A_1A'O$ et A_1AA_2 sont semblables

alors :

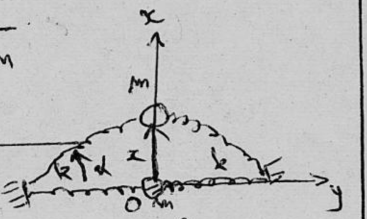
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{a}{a+b} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

(2) et (5) dans (4) on obtient:

$$\boxed{k_e = \frac{L^2}{\frac{a^2}{k_2}+\frac{b^2}{k_1}}} \qquad L = a+b$$

d'où la pulsation propre sera:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L^2}{\left(\frac{a^2}{k_2}+\frac{b^2}{k_1}\right)m}}$$



EXO 5

a) position horizontale initiale:

F_0 proportionnelle à l'allongement

donc:

$$F_0 = k(l_1 - l_0) = k_1 l_1\left(1-\frac{l_0}{l_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_0 = k_1 l_1\left(1-\frac{l_0}{l_1}\right)}$$

b) Système écarté verticalement de x:

$$\|\vec{f_1}\| = \|\vec{f_2}\| = F = k(l - l_0)$$

avec: $l = \sqrt{l_1^2 + x^2} = l_1\sqrt{1+\left(\frac{x}{l_1}\right)^2}$

on pose: $\varepsilon = \frac{x}{l_1}$ alors

$$l = l_1\sqrt{1+\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = k l_1\left(\sqrt{1+\varepsilon^2} - \frac{l_0}{l_1}\right)}$$

c) _choix de la coordonnée généralisée

La masse se déplace verticalement alors on peut choisir un axe ox vertical sur lequel la masse se déplace.

donc: $q(t) = x(t)$.

Force généralisée associée à x: f_x

Nous avons:

$$\vec{f_1} = F(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{f_2} = F(-\sin\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$\vec{F}_{rés} = \vec{f_1}+\vec{f_2} = -2F\sin\alpha\,\vec{i}$$

$$f_x = \frac{\delta W(F_{rés})}{\partial x} = \vec{F}_{rés}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = -2F\sin$$

$$\Rightarrow \boxed{f_x = -2k\left(1 - \frac{l_0}{l_1\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right)x}$$

Force dérivant du potentiel élastiq

$U(x)$ alors:

$$f_x = -\frac{dU}{dx}$$

a) 1er cas: $\frac{x}{l_1} \ll 1$ dans ce cas

$$f_x = -2k\left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right)x \Rightarrow$$

$$\boxed{U(x) = k\left(1 - \frac{l_0}{l_1}\right)x^2 + U(0)}$$

si la position d'$\longrightarrow$ est choisie com origine des potentiels alors:

$$\boxed{U(x) = k\left(1-\frac{l_0}{l_1}\right)x^2}$$

Le Lagrangien du système st alors:

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - k\left(1-\frac{l_0}{l_1}\right)x^2$$

L'équation de Lagrange pour le système sera donc (1 degré de liberté) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

d'où l'équation diff régissant le mvt du syst est :

$$\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{2k(1-\frac{l_0}{l_1})}{m}\right) x = 0}$$

équation diff de type :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

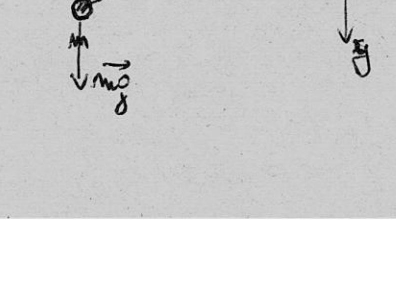
La solution est sinusoïdale de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k(1-\frac{l_0}{l_1})}{m}}}$$

b) 2ème Cas : si $\frac{l_0}{l_1} \ll 1$ alors sans faire de calcul on trouve que : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$

le syst équivalent simple est : un ressort $2k$ + m disposé verticalement.

Exo 6 :



1) Calcul de la force généralisée f_θ

$$f_\theta = f_\theta(m\vec{g}) + f_\theta(\vec{F_r})$$

$$= mg\vec{j} \cdot \frac{\delta \vec{r_m}}{\partial \theta} + \vec{F_r} \cdot \frac{\delta \vec{r_k}}{\partial \theta}$$

$$= mg\vec{j}\,\frac{\delta}{\partial \theta}(l\cos\theta\,\vec{i} + l\sin\theta\,\vec{j}) - k(a\sin\theta + b)\vec{j} \cdot \frac{\delta}{\partial \theta}(a\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{j})$$ [b = allongement initial]

$$= mgl\cos\theta - k(a\sin\theta + b)\,a\cos\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{f_\theta = (mgl - kab - ka^2\sin\theta)\cos\theta}$$

f_θ est une force qui dérive du potentiel $U(\theta)$ $\Rightarrow$

$$f_\theta = -\frac{dU}{d\theta}$$

après intégration on trouve que

$$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{2}ka^2\sin^2\theta + (kab - mgl)\sin\theta + U(0)}$$

à l'$\rightleftharpoons$ on a :

$$\left.\frac{dU(\theta)}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow kab - mgl = 0$$

d'où nous aurons : $\boxed{b = \frac{mgl}{ka}}$

c.à.d le ressort est allongé de $b = \frac{mgl}{ka}$ à l'$\rightleftharpoons$.

2) Equation diff du mvt du syst :

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \underbrace{\frac{1}{2}ka^2\sin^2\theta}_{U(\theta)}$$

L'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

d'où et après dérivation on trouve :

$$\boxed{ml^2\ddot{\theta} + ka^2\sin\theta\cos\theta = 0}$$

Dans le cas des oscillations de faibles amplitudes : $\theta \ll$ alors

$U(\theta) = \frac{1}{2}ka^2\theta^2 + U(0) \Rightarrow$

$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ka^2\theta^2 - U(0)$.

L'équation diff dans le cas aura la forme suivante :

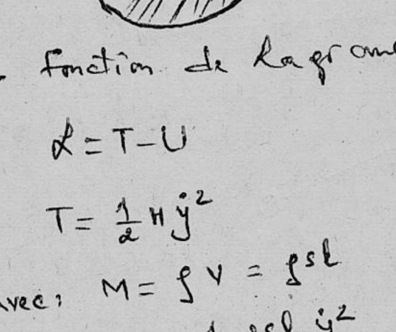
$ml^2\ddot{\theta} + ka^2\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{ml^2}\theta = 0}$

équation diff de la forme :

$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

dont la sol est sinusoïdale de pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{k}{m}}}$

Exo 7 :



- fonction de Lagrange du syst :

$\mathcal{L} = T - U$

$T = \frac{1}{2}M\dot{y}^2$

avec : $M = \rho V = \rho s l$

Donc : $T = \frac{1}{2}\rho s l\dot{y}^2$

Energie potentielle U ?

$\vec{F_r} = -\,\mathrm{grad}\,U$

La force de rappel $\vec{F_r}$ est la force de pesanteur du liquide dans le tube de longueur $2y$

$\vec{F_r} = \vec{P} = m\vec{g}$ avec :

$m = 2ys\rho \Rightarrow \vec{F_r} = 2ys\rho g\vec{j}$

$\Rightarrow U(y) - U(0) = \rho s g y^2 = \frac{Mg}{l}y^2$

$$\Rightarrow \boxed{U(y) = \frac{Mg}{l}y^2 + U(0)}$$

si la position d'équilibre est prise comme origine des potentiels alors :

$U(0) = 0 \Rightarrow$

$U(y) = \frac{Mg}{l}y^2$ et la fonction de Lagrange sera :

$\mathcal{L}(y,\dot{y}) = T - U = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \frac{Mg}{l}y^2$

avec : $M = \rho s l$

finalement on trouve :

$\ddot{y} + \frac{2g}{l}y = 0$

equation de la forme $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

la sol est alors sinusoïdale de pulsation propre :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}}}$$

fin