CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS SUR LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Dans ce chapitre le corps des scalaires $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$ et les espaces véctoriels seront définis sur $\mathbb{K}$.

1.1 Norme sur un espace véctoriel

Définition 1.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, une norme sur E est une application :*

$$\begin{aligned} N : E &\rightarrow \mathbb{R}_+ \qquad (1.1.1)\\ x &\mapsto N(x) \qquad (1.1.2)\end{aligned}$$

possédant les propriétés suivantes :

(N1) pour tout $x \in E$, on a : $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a : $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

(N3) pour tout $x, y \in E$, on a : $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

La norme N sera désignée par le symbole $\|\cdot\|$ et le couple $(E, \|\cdot\|)$ s'appelle espace normé ou espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un **espace normé** est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur E.*

Exemple 1.1.1. *1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, le module est une norme sur $\mathbb{C}$.*

2. *Les applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}^n$:*
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| (*vrifier), \quad \|x\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{1\le i\le n} |x_i|.$$
La norme $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1.2. *Soit $E = C([a,b],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles continues sur $[a,b]$. Pour tout $f \in E$, montrer que les applications suivantes définient des normes sur E.*

1. $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$*(* vérifier cet exemple),*
2. $\|f\|_2 = \Big(\int_a^b |f(x)|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}$,
3. $\|f\|_\infty = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$.

Voici quelques propriétées de la norme.

Proposition 1.1.1. 1. *On peut remplacer la propriété (N3) ci-dessus par la propriété suivante :*

(N3') pour tout $x, y \in E$ et tout $t \in [0,1]$, on a :
$$\|tx + (1-t)y\| \le t\|x\| + (1-t)\|y\|.$$

2. *Pour tout $x, y \in E$, on a*
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|. \tag{1.1.3}$$

3. *L'inégalité (N3) se généralise à n points. Pour tout $x_1, x_2, ..., x_n \in E$, on a :*
$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i\Big\| \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

De l'inégalité (1.1.3), on a l'affirmation suivante :

Corollaire 1.1.1. *L'application norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ est continue sur E muni de la topologie induite par $\|\cdot\|$. Elle est même 1-Lipschitzienne.*

Remarque 1.1.1 (Distance associée à une norme). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. L'application suivante :*
$$\begin{aligned} f : E\times E &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \|x-y\|, \end{aligned}$$
est appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$. Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall (x,y) \in E^2 : d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $\forall (x,y) \in E^2 : d(x,y) = d(y,x).$
3. $\forall (x,y,z) \in E^3 : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

1.2 Equivalence des normes

Définition 1.2.1. *Deux normes* $\|\cdot\|_1$ *et* $\|\cdot\|_2$ *sur un espace vectoriel* E *sont dites équivalentes s'il existe* $\alpha, \beta > 0$ *tels que pour tout* $x \in E$ *on ait*

$$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2.$$

Remarque 1.2.1. *En général pour prouver que deux normes* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ *sur un espace véctoriel* E *ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite* $(x_n)_n \subset E$ *de sorte que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2} = 0 \qquad ou \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2} = +\infty.$$

1.3 Espaces de Banach

Définition 1.3.1. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.3.2. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de points d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est dite convergente vers* $x_0 \in E$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_0\| \leq \varepsilon.$$

Définition 1.3.3. *Un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est complet si toute suite de Cauchy de points de* E *est convergente.*

L'avantage des espaces complets est que dans de tels espaces, il n'est pas utile de connaitre la limite d'une suite pour montrer qu'elle est convergente, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Définition 1.3.4. *Un espace de Banach est un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ qui est complet pour la distance associée à la norme.*

Exemple 1.3.1. 1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est un espace de Banach.*

2. $\mathbb{R}^n$ *muni de* $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}; (p \geq 1)$ *ou de* $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ *est un espace de Banach.*

Remarque 1.3.1. *La complètude est conservée par changement de normes équivalentes. Si, par exemple, une suite $(x_n)_n$ est de Cauchy et qu'elle converge pour une norme donnée, il en sera de même pour tout autre norme équivalente.*

Dans ce paragraphe on s'intéresse à un $\mathbb{K}$-espace véctoriel E de dimension finie n.

Lemme 1.3.1. *Soit E un espace véctoriel de dimension finie. Alors il existe une infinité de normes sur E.*

Démonstration. Soit $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ une base de E, alors pour tout $x \in E$, il existe un unique élément $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{K}^n & \to & E \\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) & \mapsto & \psi(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}$$

est linéaire et bijective. Comme on a une infinité de normes dans $\mathbb{K}^n$, alors on déduit le résultat. $\square$

Théorème 1.3.1. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace véctoriel normé de dimension finie alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

1.4 Exercices

Exercice 1. *Montrer que Les normes fondamentales $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.*

Exercice 2. *Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continûement dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in E$, on pose*

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

1. *Montrer que* $\|\cdot\|_1$ *est une norme sur* E.

2. *Est-elle équivalente à la norme* $\|f\|_2 = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|)$ *?*

Exercice 3. *Montrer que la norme* $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$ *n'est pas équivalente à la norme de la convergence uniforme* $\|f\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} |f(x)|$ *dans* $C([0,1],\mathbb{R})$.
Utiliser la suite de fonctions $(f_n)_n$ *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-(n+1)x, & 0 \le x \le \frac{1}{n+1}\,; \\ 0, & \frac{1}{n+1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Exercice 4. *Montrer que* $\big(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ *est un espace de Banach.*

Exercice 5. *Soit* $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme fondamentale :*

$$\|f\|_2 = \Big(\int_{-1}^1 |f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

On considère la suite (u_n) *qui définie par*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & si\ -1 \le x < \frac{-1}{n}, \\ nx+1, & si\ \frac{-1}{n} \le x < 0, \\ 1, & si\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que* (u_n) *est de Cauchy dans* E.

2. *Montrer que* (u_n) *n'est pas convergente dans* E.

3. *Que peut-on déduire ?*

1.5 Corrigé des exercices du chapitre 1

Correction de l'exercice1

— Evident que $\|x\|_\infty = \sup|x_i| \le \sum_{i=1}^N |x_i| = \|x\|_1$.
  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \le N\sup|x_i| = N\|x\|_\infty$.

— Par Cauchy Schwarz on obtient $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \le \sqrt{N}\|x\|_2$.
  D'autre part, on a :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2} \le \sum_{i=1}^N \sqrt{|x_i|^2} = \sum_{i=1}^N |x_i| = \|x\|_1.$$

Correction de l'exercice2

1. $\|\cdot\|_1$ est une norme, car :

   (a) Soit $f \in E = C^1([0,1],\mathbb{R})$. Si $\|f\|_1 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}\|f\|_1 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|) = 0 \\ &\Rightarrow \quad |f(x)| + |f'(x)| = 0 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} |f(x)| = 0, & \forall x \in [0,1] \\ |f'(x)| = 0 & \forall x \in [0,1] \end{cases} \\ &\Rightarrow \quad |f(x)| = 0, \quad \forall x \in [0,1]\end{aligned}$$

   Donc $f = 0$.

   (b) Soit $f \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_1 &= \sup_{x\in[0,1]} (|\lambda f(x)| + |\lambda f'(x)|) \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |\lambda(f(x)| + |f'(x)|) \\ &= |\lambda| \sup_{x\in[0,1]} |(f(x)| + |f'(x)|) = |\lambda| \|f\|_1.\end{aligned}$$

   (c) Soit $f, g \in E$; on a : $\|f+g\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)+g(x)| + |f'(x)+g'(x)|)$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)| + |f'(x)+g'(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| + |f'(x)| + |g'(x)| \\ &\leq (|f(x)| + |f'(x)|) + (|g(x)| + |g'(x)|) \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|) + \sup_{x\in[0,1]} (|g(x)| + |g'(x)|)\end{aligned}$$

   et par suite :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)|+|f'(x)+g'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|f'(x)|)+\sup_{x\in[0,1]} (|g(x)|+|g'(x)|),$$

   ce qui montre que $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Par conséquent $\|\cdot\|_1$ définie une norme sur E.

2. D'une part, pour tout $x \in [0,1]$ on a :

$$|f(x)| + |f'(x)| \quad \leq \quad \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|,$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|) \leq \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|,$$

d'où : $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

D'autre part, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x)|+|f'(x)|-|f'(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|)-|f'(x)|, \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|)-|f'(x)|$$

ce qui implique :

$$|f'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|) - \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|, \forall x \in [0,1],$$

alors on a :

$$\sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|) - \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|,$$

par suite :

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}(|f(x)|+|f'(x)|), \forall x \in [0,1].$$

On déduit que $\|f\|_2 \leq \|f\|_1$. La conclusion est que les normes son équivalentes ($\|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2$) et en plus $\|f\|_1 = \|f\|_2$.

Correction de l'exercice3 on a $\|f_n\|_\infty = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ de telle sorte que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty.$$

Correction de l'exercice4

On vérifie par exemple que l'espace $\big(C([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ est complet :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p,q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon,$$

d'où :

$$\forall p,q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon. \tag{1.5.1}$$

Donc pour tout $x \in [a,b]$, la suite de nombres réels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, mais comme $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet, cette suite de Cauchy converge vers un réel que nous noterons $f(x)$. On définit la fonction :

$$\begin{array}{rcl} f:[a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & f(x) \end{array}$$

On fait tendre p vers $+\infty$ dans (1.5.1). On a donc

$$\forall q \in \mathbb{N} : q \geq n_0, \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout x dans $[a,b]$, on a :

$$\|f - f_q\|_\infty \leq \infty.$$

Ceci est vrai pour tout $q \geq N$, et donc (f_q) converge vers f. Finalement, toute suite de Cauchy (f_n) de $C([a,b],\mathbb{R})$ converge, donc $C([a,b],\mathbb{R})$ est complet.

Correction de l'exercice5

1. D'abord, on remarque que les fonctions u_n sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(u_n) \subset E$. Elle est de Cauchy, en effet; soit $\varepsilon > 0$ et soit $p, q \in \mathbb{N}$ telles $p > q$, on estime $\|u_p - u_q\|$. On s'appuit sur le tableaux suivant :

x	-1	$\frac{-1}{q}$	$\frac{-1}{p}$	0	1
$u_p(x)$	0	0	$px+1$	1	
$u_q(x)$	0	$qx+1$	$qx+1$	1	
$u_p(x) - u_q(x)$	0	$-(qx+1)$	$(p-q)x$	0	

TABLE 1.1 – Table to test captions and labels

d'où :

$$\begin{array}{rcl} \|u_p - u_q\|^2 & = & \displaystyle\int_{-1}^{1} |u_p - u_q|^2\,dx \\ & = & \displaystyle\int_{-\frac{1}{q}}^{-\frac{1}{p}} |qx+1|^2\,dx + (p-q)^2 \int_{-\frac{1}{p}}^{0} x^2\,dx \\ & = & \dfrac{(p-q)^3}{3qp^3} + \dfrac{(p-q)^2}{3p^3} \\ & \leq & \dfrac{2}{q} \to 0 \quad \text{quand} \;\; q \to +\infty. \end{array}$$

2. Par ailleurs, il est clair que la suite (u_n) converge simplement vers la fonction u avec :
$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -1 \leq x < 0; \\ 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$
On a :
$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 &= \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} (nx+1)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{3n} \to 0 \qquad n \to +\infty. \end{aligned}$$
En fin, on constate que u n'est pas continue en 0, il en résulte qu'elle n'appartient pas à E et par suite (u_n) n'est convergente dans E.
3. $(E, \|\cdot\|)$ n'est pas complet donc n'est pas un espace de Banach.