Série 01 : Généralités sur les espaces véctoriels normés

Exercice 1 *Montrer que Les normes fondamentales* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ *définies sur* $\mathbb{R}^n$ *sont équivalentes.*

Exercice 2 *Soit* $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions continûement dérivables de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$. *Pour tout* $f \in E$, *on pose*

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

1. *Montrer que* $\|\cdot\|_1$ *est une norme sur* E.
2. *Est-elle équivalente à la norme* $\|f\|_2 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|)$ *?*

Exercice 3 *On considère*

$$\begin{array}{rcl} C([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt. \end{array}$$

1. *Justifier que c'est une norme sur* $C([0,1],\mathbb{R})$.
2. *On considère la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *définie par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-(n+1)x, & 0 \le x \le \frac{1}{n+1}\ ; \\ 0, & \frac{1}{n+1} \le x \le 1. \end{cases}$$

   Calculer $\|f_n\|_1$.
3. *Justifier que* $\|\cdot\|_1$ *et la norme de la convergence uniforme* $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$ *ne sont pas équivalentes sur* $C([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 4 *Soit* $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$, *on considère* $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$ *pour* $f \in E$. *Montrer que ce n'est pas une norme ; c.à.d. quelle propriété est mise en défaut ? Est-ce que toutes les autres sont respectées ?*

Exercice 5 *Soit* $E = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}), f(0) = 0\}$, *et pour* $f \in E$ *on note* $N_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ *et* $N_2(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$.

1. *Justifier que* N_1 *et* N_2 *sont des normes sur* E.
2. *Montrer que* $N_1 \le N_2$.

3. *A l'aide de fonctions simples, montrer qu'une inégalité dans l'autre sens n'est pas possible.*

Exercice 6 *Soit* $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$ *que l'on munit de* $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. *Démontrer que* (E, N) *est un espace complet (de Banach).*

Indication : Utiliser que l'espace $C^1([0,1], \mathbb{R})$ *muni de* $\|\cdot\|_\infty$ *est complet.*

Exercice 7 *Soit* $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme fondamentale :*

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

On considère la suite (u_n) *qui définie par*

$$u_n(x) = \begin{cases} 0, & si \ -1 \leq x < \frac{-1}{n}, \\ nx + 1, & si \ \frac{-1}{n} \leq x < 0, \\ 1, & si \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. *Montrer que* (u_n) *est de Cauchy dans* E.
2. *Montrer que* (u_n) *n'est pas convergente dans* E.
3. *Que peut-on déduire ?*

Exercice 8 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* E *l'espace vectoriel des polynômes de degré* $\leq n$. *Démontrer qu'il existe* $\lambda > 0$ *tel que pour tout* $P \in E$, *on a*

$$\int_0^1 |P(x)| \, dx \geq \lambda \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

a_{Ds}^{α}