CHAPITRE 2

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. une application $f : E \to F$ est dite linéaire de E dans F, si elle vérifie pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et tout $x, y \in E$:*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

On note par $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires définies de E dans F, cet ensemble construit un structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on le muni par les deux lois de composition usuelles suivants :

$$\begin{aligned} L(E,F) \times L(E,F) &= L(E,F) \\ (f,g) &= f+g, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times L(E,F) &= L(E,F) \\ (\lambda,f) &= \lambda f. \end{aligned}$$

Définition 2.1.2 (Forme linéaire)**.** *On appelle **forme linéaire** sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, toute application linéaire définie de E dans $\mathbb{K}$.*

Définition 2.1.3 (Dual algébrique)**.** *On désigne l'ensemble des formes linéaires définies sur E par :*

$$E^* = L(E, \mathbb{K}).$$

*et on l'appelle **dual algébrique** de E.*

— D'après l'exercice 6, on peut remarquer que $F \in (\mathbb{R}^n)^*$, $T \in \Big(C([0,1],\mathbb{R})\Big)^*$ et D n'est pas une forme linéaire.

— Facilement de voir que E^* possède une structure d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

La proposition suivante fournit une caractérisation importante pour la continuité d'une application linéaire.

Proposition 2.1.1. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E. \tag{2.1.1}$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ Supposons que f est continue sur E, en particulier, elle est continue en 0, donc par définition on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, \|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

En prenant $\varepsilon = 1$, pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on pose $y = \frac{\delta}{\|x\|_E}x$, comme $\|y\|_E = \delta$, alors on a :

$$\|f(y)\|_F = \frac{\delta}{\|x\|_E}\|f(x)\|_F \leq 1,$$

et par conséquent :

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E.$$

Il suffit de prendre $C = \frac{1}{\delta}$.

$(\Leftarrow)$ Si l'inégalité 2.1.1 est satisfaite, alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq C\|x - y\|_E$$

et l'application linéaire f est Lipschitzienne et par conséquent f est continue (uniformément) sur E.

□

Définition 2.1.4 (Dual topologique)**.** *On appelle **dual topologique** de E, et on note $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.*

Exemple 2.1.1. *D'après l'exercice 7 et en prenant les normes associées, on remarque que $f \in (\mathbb{R}^n)'$, $T \in \big(C([0,1], \mathbb{R})\big)'$, $L \in \mathcal{L}\big(C([0,1], \mathbb{R}), C^1([0,1], \mathbb{R})\big)$ mais $S \notin \big(C([0,1], \mathbb{R})\big)'$.*

Proposition 2.1.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé de dimension finie, alors pour tout espace normé F on a :*

$$L(E,E) = \mathcal{L}(E,E).$$

Autrement dit : toute application linéaire définie de E dans F est continue.

En particulier, on a $E^* = E'$.

Démonstration. On fixe une base $\{e_i\}_{1\leq i\leq n}$ de E et on le muni de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \forall x \in E,$$

où $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base considérée. Supposons que f est une application linéaire de E dans un espace normé quelconque $(F, \|\cdot\|)$. On a

$$\|f(x)\| = \|f\big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\big)\| = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|f(e_i)\|.$$

On pose $C = \max\limits_{1\leq i\leq n} \|f(e_i)\|$, d'où :

$$\|f(x)\| \leq C\|x\|_1$$

ce qui montre que f est continue. De plus, si on prend $F = \mathbb{K}$, alors on obtient $E^* = E'$. □

2.2 Espace $\mathcal{L}(E,F)$

Proposition 2.2.1. *Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels normés. L'espace $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel normé par :*

$$\|f\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Démonstration. Facilement de voir que $\mathcal{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-sous espace vectoriel. On va montrer que $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{K}$ définie une norme ; soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. Evident que si $f = 0$ alors $\|f\| = 0$. Si $\|f\| = 0$, alors pour tout $x \in E$ non nul on a $\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = 0$, d'où $\|f(x)\|_F = 0$ et comme $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F, donc on déduit que $f(x) = 0, \forall x \in E \setminus \{0\}$, de plus, on a $f(0) = 0$, donc on obtient que $f = 0$.

2. Soit $\in E \setminus \{0\}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\|\lambda f\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\|f\|.$$

3. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\|f + g\| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x) + g(x)\|_F}{\|x\|_E},$$

En utilisant le fait que $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F et la propriétée d'additivité de la borne supérieure, on obtient :

$$\|f + g\| \leq \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} + \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|g(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Ainsi, $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

□

Remarque 2.2.1. *De la définition de $\|f\|$, on peut écrire l'inégalité suivante :*

$$\forall x \in E : \quad \|f(x)\|_F \leq \|f\|\|x\|_E.$$

2.3 Exercices

Exercice 6. *Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires :*

i)

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x = (x_1, ..., x_n) &\to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} T : C([0,1], \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} D : C^1([0,1], \mathbb{R}) &\to C([0,1], \mathbb{R}) \\ f &\to D(f) = f'. \end{aligned}$$

Exercice 7. *Etudier la continuité des applications linéaires suivantes :*

1. *Soit* $E = \mathbb{R}^N$ *muni de la norme euclidienne* $\|x\|_2 = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$. *L'application linéaire*

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

.

2. *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme infiné* $\|\cdot\|_\infty$. *L'application linéaire suivante :*

$$\begin{aligned} T : E &\to \mathbb{R} \\ f &\to T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx. \end{aligned}$$

.

3. *On munit les espaces* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *et* $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$ *de la norme infini* $\|\cdot\|_\infty$. *L'application définie par*

$$\begin{aligned} L : E &\to F \\ f &\to L(f); \end{aligned}$$

où $L(f)(x) = \int_0^x f(x)\, dx$.

4. *On munit l'espace* $C([0,1], \mathbb{R})$ *de la norme* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$, *la forme linéaire*

$$\begin{aligned} S : E &\to \mathbb{R} \\ f &\to S(f) = f(0). \end{aligned}$$

Indication : utiliser la suite de fonctions (f_n) *définie par*

$$\begin{cases} 1 - (n+1)x, & si\ 0 \le x \le \frac{1}{n+1}; \\ 0, & si\ \frac{1}{n+1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Exercice 8. *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *deux* $\mathbb{K}$*-espace vectoriels normés et* f *une forme linéaire continue. Montrer qu'on a :*

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \le 1} \|f(x)\|_F = \inf\big\{c > 0 : \|f(x)\|_F \le c\|x\|_E\big\}.$$

Exercice 9. *Calculer la norme $\|T\|$ dans les cas suivants :*

1. *Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme infiné $\|\cdot\|_\infty$.*

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx. \end{array}$$

2. *Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme*

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

On considère l'application $\psi : E \to E$ définie par :

$$\psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Utiliser la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}, x \in [0,1].$$

2.4 Corrigé des exercices du chapitre 2

Correction de l'exercice 6

Evident

Correction de l'exercice 7

1. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$|f(x)| = |\sum_{i=1}^n x_i| \le \big(\sum_{i=1}^n 1^2\big)^{\frac{1}{2}} \big(\sum_{i=1}^n x_i^2\big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\|x\|_2$$

donc, il suffit de prendre $C = \sqrt{n}$.

2. Pour tout $f \in C([0,1], \mathbb{R})$, on a :

$$|T(f)| = \Big|\int_0^1 f(x)\, dx\Big| \le \int_0^1 |f(x)|\, dx \le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \int_0^1\, dx,$$

donc

$$|T(f)| \le \|f\|_\infty, \tag{2.4.1}$$

il suffit de prendre $C = 1$.

3. Pour tout $f \in E$ on a :

$$\|L(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \Big| \int_0^x f(t)\, dt \Big| \leq \sup_{x\in[0,1]} \Big(x \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \Big) = \|f\|_\infty.$$

Il suffit de prendre $C = 1$.

4. Il suffit de trouver une suite $(f_n) \subset E$ de sorte que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|S(f_n)|}{\|f_n\|_1} = +\infty.$$

En effet, on prend la suite de fonctions (f_n) définie par

$$\begin{cases} 1-(n+1)x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}\,; \\ 0, & \text{si } \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

On a $f_n(0) = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$, d'où $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{|f_n(0)|}{\|f_n\|_1} = +\infty$.
(On s'inspire cette méthode de la négation de l'inégalité (2.1.1)).

Correction de l'exercice8

On pose $A = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$, $B = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$, $C = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F$, $D = \inf\big\{\lambda > 0 : \|f(x)\|_F \leq \lambda\|x\|_E\big\}$.

(i) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$A = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \Big\| \frac{1}{\|x\|_E} f(x) \Big\|_F = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \Big\| f(\frac{x}{\|x\|_E}) \Big\|_F,$$

on pose $y = \dfrac{x}{\|x\|_E}$, donc on obtient :

$$A = \sup_{\|y\|_E=1} \Big\| f(y) \Big\|_F = B.$$

(ii) En remarquons que $\big\{\|f(x)\|_F ; \|x\|_E = 1\big\} \subset \big\{\|f(x)\|_F ; \|x\|_E \leq 1\big\}$, alors on déduit que $B \leq C$.

(iii) On vérifie que C est un minirant de l'ensemble $\big\{\lambda > 0 : \|f(x)\|_F \leq \lambda\|x\|_E\big\}$; en effet, soit $\lambda > 0$ telle que $\|f(x)\|_F \leq \lambda\|x\|_E$. Donc pour tout $x \in E$ avec $\|x\|_E \leq 1$, on a

$$\|f(x)\|_F \leq \lambda\|x\|_E \leq \lambda,$$

d'où $\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F \leq \lambda$ et par conséquent $C \leq D$.

(iv) Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a
$$\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq A,$$
c.à.d. $\|f(x)\|_F \leq A\|x\|_E$, donc par la définition de D, on déduit que $D \leq A$ car $A \in \big\{\lambda > 0 : \|f(x)\|_F \leq \lambda\|x\|_E\big\}$.

On conclut que $A = B \leq C \leq D \leq A$ ce qui montre que les quatre nombres sont égaux.

Correction de l'exercice9

1. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infiné $\|\cdot\|_\infty$. On a déjà montrer que l'application
$$\begin{aligned} T : E &\to \mathbb{R} \\ f &\to T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx. \end{aligned}$$
appartient à $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Maintenant, on calcule $\|T\| = \sup\limits_{\|f\|_\infty} |T(f)|$, d'après l'inégalité (2.4.1) et en vertu la définition de $\|T\|$ ($\|T\| = D$), on voit que $\|T\| \leq 1$. D'autre part, on cherche, s'il existe, un élément de $\overline{B}(0,1)$ de sorte que $|T(f_0)| \geq 1$, en effet, on prend $f_0 \equiv 1$ qui vérifie :
$$\|f_0\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |1| = 1, \quad \text{et} \quad T(f_0) = \int_0^1 f_0(x)\,dx = 1$$
ce qui implique que $\|T\| \geq 1$. On conclut que $\|T\| = 1$.

2. Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$
On considère l'application $\psi : E \to E$ définie par :
$$\psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$
D'abord, on voit que ψ est linéaire, on vérifie que ψ est continue ; soit $f \in E$, pour tout $x \in [0,1]$ on a :
$$|\psi(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|_1,$$
d'où
$$\|\psi(f)\|_1 = \int_0^1 |\psi(f)(x)|\,dx \leq \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1, \tag{2.4.2}$$

il suffit de prendre $c = 1$ pour que ψ soit dans $\mathcal{L}(E)$. On calcule $\|\psi\|$; de l'inégalité (2.4.2), on obtient $\|\psi\| \leq 1$.

Pour démontrer l'inégalité inverse, on considère la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}, x \in [0, 1].$$

On sait que

$$\|\psi(f_n)\|_1 \leq \|\psi\| \|f_n\|_1, \tag{2.4.3}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\|\psi(f_n)\|_1 &= \int_0^1 |\psi(f_n)(x)|\, dx = \int_0^1 \left| \int_0^x ne^{-nt}\, dt \right| dx = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}. \\
\|f_n\|_1 &= \int_0^1 ne^{-nx}\, dx = 1 - e^{-n}.
\end{aligned}$$

On remplace dans (2.4.3) on obtient

$$\|\psi\| \geq \frac{\|\psi(f_n)\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{1 - e^{-n}} - \frac{1}{n},$$

En faisant le passage de la limite dans cette inégalité, on conclut que $\|\psi\| \geq 1$ ce qui montre que $\|\psi\| = 1$.