Série 02 : Applications linéaires sur les espaces véctoriels normés

Exercice 1 *Etudier la continuité des applications linéaires suivantes :*

1. *Soit* $E = \mathbb{R}^N$ *muni de la norme euclidienne* $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^N$.

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{array}$$

.

2. *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme infinée* $\|\cdot\|_\infty$.

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx. \end{array}$$

.

3. *On munit les espaces* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *et* $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$ *de la norme infini* $\|\cdot\|_\infty$.

$$\begin{array}{rcl} L : E & \to & F \\ f & \to & L(f); \end{array}$$

où $L(f)(x) = \int_0^x f(x)\, dx$.

4. *On munit l'espace* $C([0,1], \mathbb{R})$ *de la norme* $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx$ *;*

$$\begin{array}{rcl} S : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & S(f) = f(0). \end{array}$$

Indication : utiliser la suite de fonctions (f_n) *définie par*

$$\begin{cases} 1 - (n+1)x, & si\ 0 \le x \le \frac{1}{n+1}\ ; \\ 0, & si\ \frac{1}{n+1} \le x \le 1. \end{cases}$$

Exercice 2 *Calculer la norme* $\|T\|$ *dans les cas suivants :*

1. *Soit* $E = C([0,1], \mathbb{R})$ *muni de la norme infinée* $\|\cdot\|_\infty$.

$$\begin{array}{rcl} T : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & T(f) = \int_0^1 f(x)\, dx. \end{array}$$

2. *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. On considère l'application $\psi : E \to E$ définie par :*

$$\psi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Utiliser la suite de fonctions (f_n) définie par :

$$f_n(x) = ne^{-nx}, x \in [0,1].$$

Exercice 3 *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application*

$$\begin{array}{rcl} L : E & \to & E \\ f & \mapsto & L(f) \end{array}$$

où $L(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par

$$L(f)(x) = \int_0^1 (x+s)f(s)\,ds, \quad \forall x \in [0,1].$$

1. *Justifier que l'application T est bien définie.*
2. *Vérifier que L est linéaire et continue.*
3. *Calculer $\|L\|_{\mathcal{L}(E)}$.*

Exercice 4 *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On considère l'application :*

$$\begin{array}{rcl} u : E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & u(f) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n} f\big(\frac{1}{2^n}\big). \end{array}$$

1. *Vérifier que u est bien définie.*
2. *Montrer que u est linéaire et continue.*
3. (a) *Soit $\{f_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a*

   $$\forall n \leq N : \quad f_N\big(\frac{1}{2^n}\big) = (-1)^n \ \ et \ \ \|f_N\| \leq 1.$$

   Montrer que $|u(f_N)| \geq 2 - \frac{1}{2^{N-1}}$.

   (b) *En déduire $\|u\|_{E'}$.*

Exercice 5 *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On pose :*

$$F = \{f \in E; f(0) = 0 \ \ et \ \ \int_0^1 f(t)\,dt \geq 1\}$$

Démontrer que F est une partie fermée de E.