CHAPITRE 3

ESPACES DE HILBERT

3.1 Généralités sur les espaces préhilbertiens et de Hilbert

Définition 3.1.1 (Produit scalaire)**.** *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un* ***produit scalaire*** *sur E est une application :*

$$\begin{array}{rcl} \langle \cdot,\cdot\rangle : E\times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \langle x,y\rangle, \end{array}$$

vérifiant pour tout $x, x', y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. *Linéaire par rapport à la première variable : $\langle x+\lambda x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \lambda\langle x',y\rangle$.*
2. *Symétrique : $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$*
3. *(Positif : $\langle x,x\rangle \geq 0$ et défini ; c.à.d : $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$) ou positif défini ; c.à.d. $\forall x \in E - \{0_E\}, \langle x,x\rangle > 0$.*

Le nombre $\langle \cdot,\cdot\rangle$ scalaire de x et y est appelé le produit scalaire des x et y.

Définition 3.1.2 (Espace préhilbertien)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un* ***espace préhilbertien*** *est un couple $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.*

Exemple 3.1.1. *D'après les exercice 11, on déduit que $(\mathbb{R}^N, u_1)$, $\big(C([0,1],\mathbb{R}), u_2\big)$ sont des espaces préhilbertiens*

Proposition 3.1.1 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**.** *Soit E un espace préhilbertien, alors pour touts $u, v \in E$, on a :*

$$|\langle u,v\rangle| \leq \sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle}. \tag{3.1.1}$$

Démonstration. Soit $u, v \in E$;

— Si $u = 0$, ou $v = 0$; l'inégalité (3.1.1) est immédiate.

— Si $u \neq 0$ et $v \neq 0$: on pose

$$w = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v,$$

d'une part on peut voir que $\langle w, w\rangle \geq 0$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\langle w, w\rangle &= \langle u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - 2\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle v, v\rangle} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle v, v\rangle} \\
&= \langle u, u\rangle - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle v, v\rangle};
\end{aligned}$$

D'ou :

$$\begin{aligned}
\langle w, w\rangle \geq 0 &\Leftrightarrow \langle u, u\rangle - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\langle v, v\rangle} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow |\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle \\
&\Leftrightarrow |\langle u, v\rangle| \leq \sqrt{\langle u, u\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}.
\end{aligned}$$

Donc, on a l'inégalité. □

Proposition 3.1.2 (Inégalité de Minkofiski)**.** *Soit* $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace préhilbertien, pour tout* $x, y \in E$ *on a :*

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle} \tag{3.1.2}$$

Démonstration. Soient $x, y \in E$, on a :

$$\langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle,$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle x + y, x + y\rangle &\leq \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} \\
&= (\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle})^2,
\end{aligned}$$

d'ou

$$\sqrt{\langle x + y, x + y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

□

Exercice 10. *Si E est un espace préhilbertien munit par le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$, montrer l'application*

$$\begin{aligned} \| \cdot \| : E &\to \mathbb{R}_+ \\ u &\to \|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} \end{aligned}$$

définit une norme sur E.

Remarque 3.1.1. *D'après la proposition 10, on a l'implication suivant :*
$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *est un espace préhilbertien* $\Rightarrow (E, \| \cdot \|)$ *est un espace normé où* $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Proposition 3.1.3 (Identité du parallélogramme). *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien, pour tout $x, y \in E$, on a :*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

où $\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$.

Démonstration. Par un calcul simple on btient

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \tag{3.1.3}$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \tag{3.1.4}$$

En additionnant (3.1.3) et (3.1.4), on obtient $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ □

On a le résultat suivant :

Proposition 3.1.4. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé par $\| \cdot \|$, on a l'équivalence suivant :*
$\Big[$*Eest un espace préhilbertien*$\Big] \Leftrightarrow \Big[$*La norme* $\| \cdot \|$*vérifie l'identité de parallélogramme*$\Big]$

Remarque 3.1.2. *La proposition 3.1.4 nous permet de vérifier que certaine normes est associé au produit scalaire ou non, c'est-à-dire l'identité de parallélogramme caractérise les espaces préhilbertiens parmi les espaces normés.*

Définition 3.1.3. *Un espace de Hilbert (ou Hilbertien) est un espace préhilbertien complet.*

Remarque 3.1.3. *Il découle de cette définition que tout espace de Hilbert est un espace de Banach particulier.*

Exemple 3.1.2. 1. *$\mathbb{R}$ est un espace de Hilbert avec $\langle x, y\rangle = xy$ et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^2} = |x|$.*

2. *$\mathbb{R}^N$ est un espace de Hilbert avec $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$*

3. *$l_2(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ est un espace de Hilbert avec $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$.*

4. *L'espace $C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\ dt$ n'est pas un espace de Hilbert car il n'est pas complet ; en effet : voir l'exercice 5.*

3.2 Orthogonalité, famille orthogonale et famille orthonormale

Définition 3.2.1. *Soit H un espace préhilbertien, soit $x, y \in H$, on dit que x et y sont orthogonaux (noté $x \perp y$) si et seulement si $\langle x, y\rangle = 0$.*

Exemple 3.2.1. $E = \mathbb{R}^N$, $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

$$e_\alpha = (0, ..., 0, \underbrace{1}_{ordre \alpha}, 0, ..., 0)$$

pour tout $\alpha, \beta \in 1, 2, ..., N$, $\alpha \neq \beta$ on a $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = 0$, c.à.d $e_\alpha \perp e_\beta$

Dans la proposition suivante on rassemble quelques propriétés fondamentales.

Proposition 3.2.1. *Soit E un espace préhilbertien*

1. *Pour tout $x \in E$: $x \perp 0$.*

2. *Pour tout $x, y \in E$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $x \perp y \Leftrightarrow \alpha x \perp \beta y$.*

3. *Pour tout $x, y_i \in E, \alpha_i \in \mathbb{R}$; $i \in \{1, ..., n\}$, on a :*

$$\forall i \in 1, 2, ..., n : \quad x \perp y_i \Rightarrow x \perp \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.$$

Démonstration. Evidante. □

Définition 3.2.2. *On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille orthogonale** ou **système orthogonal** si les x_i sont deux à deux orthogonaux, autrement dit*

$$\forall i,j \in I, i \neq j, \quad \textit{on ait : } \langle x_i, x_j\rangle = 0.$$

Définition 3.2.3. *On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille orthonormale** ou **système orthonormal** ou **système orthonormé** si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale et si de plus pour tout $i \in I$, on a $\langle x_i, x_i\rangle = 1$, autrement dit*

$$\Big[(x_i)_{i\in I} \textit{ est une famille orthonormale}\Big] \Leftrightarrow \forall i,j \in I : \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{si } i = j \\ 0, & \textit{si } i \neq j. \end{cases}$$

Remarque 3.2.1. *Si $\{x_i\}_{i\in I}$ est une famille orthogonale, alors la famille $\left\{\dfrac{x_i}{\|x_i\|}\right\}$ est orthonormale.*

Exemple 3.2.2. *La famille $\{e_\alpha\}$ est une famille orthonormale et la famille $\{f_n\}_n$ est une famille orthogonale (voir l'exemple 3.2.1 et l'exercice 13), de plus on a*

$$\|f_n\|^2 = \langle f_n, f_n\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \, dt = \pi,$$

alors la famille $\{\frac{1}{\sqrt{\pi}} f_n\}$ est orthonormale.

3.3 Orthogonal d'une partie et propriétés

Définition 3.3.1. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien, si A une partie non vide de E, on appelle orthogonal de A et l'on note $A^\perp$ l'ensemble de vecteurs orthogonaux à tout les vecteurs de A, c.à.d.*

$$A^\perp = \{x \in E : \langle x, a\rangle = 0, \ \textit{pour tout } a \in A\}.$$

3.4 Projection orthogonale dans un espace préhilbertien

Définition 3.4.1. *Soit (E, d) un espace métrique et soit F une partie fermée de E, soit x un point de E. On appelle projection du point x sur F tout point b de F vérifie :*

$$d(x, b) = d(x, F) = \inf_{y\in F} d(x, y).$$

On note par $P_F(x)$ la projection du x sur F s'il existe.

Remarque 3.4.1. *1. Evidement de voir que si $x \in F$, alors $P_F(x) = x$.*

2. *L'existence de $P_F(x)$ n'est pas assurée et s'il existe il peut ne pas être unique, par exemple : on prend $E = \mathbb{R}$ evec $d(x, y) = |x - y|$, $F = [0, 1[$ et $x = 2$, alors, dans cet exemple on remarque que la projection de 2 sur F n'existe pas. Maintenant on prend $E = \mathbb{R}^2$ avec $d(x, y) = \|x - y\|_2$ et F est la sphère de la boule de centre x fixé dans E, dans ce cas, la projection de x sur F n'est pas unique.*

Théorème 3.4.1 (Projection sur un convexe)**.** *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien et $F \subset H$ une partie non vide convexe . On suppose de plus que A est complète. Alors on a :*

1. *Pour tout $x \in H$ il existe une projection unique de x sur F ; c.à.d.*

$$d(x, A) = \|x - P_F(x)\|; \quad P_F(x) \in F.$$

2. *La projection $b_x = P_F(x)$ est caractérisée par*

$$\langle x - b_x, y - b_x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in F. \tag{3.4.1}$$

Remarque 3.4.2. *Dans le théorème 3.4.1, lorsque E est un espace de Hilbert, on peut supposer que la partie $F \subset H$ est convexe et fermé car on sait que le fermé dans un espace complet est complet quand il est muni de la distance induite par la norme sur E.*

Théorème 3.4.2 (Projection sur un sous espace de Hilbert)**.** *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel fermé et x un élément de H. Alors il existe un unique élément $b_x \in F$ tel que*

$$\|x - b_x\| = d(x, F).$$

De plus, b_x est l'unique élément de F tel que $x - b_x$ soit orthogonal à F ; c.à.d.

$$b_x = P_F(x) \Leftrightarrow \langle x - b_x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in F.$$

3.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie et applications

Proposition 3.5.1. *Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de dimension finie avec $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormale de F. Alors pour tout $x \in E$, on a :*

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Démonstration. — On sait que $P_F(x) \in F = Vect\{e_1, ..., e_n\}$, alors il existe $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$$

— D'après le théorème 3.4.2, $P_F(x)$ et caractérisée par $x - P_F(x) \in F^{\perp}$, c.à.d.

$$\langle x - P_F(x), y \rangle = 0, \quad \forall y \in F$$

et par suite

$$\langle x - P_F(x), e_j \rangle = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\},$$

d'où :

$$\langle x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \rangle = 0, \quad \forall j \in \{1, 2, ..., n\},$$

ce qui donne n équations linéaire dont les inconnues sont $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_1 \rangle = \langle x, e_1 \rangle, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_2 \rangle = \langle x, e_2 \rangle, \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle \quad . \end{cases}$$

Donc, on obtient :

$$\alpha_1 = \langle x, e_1 \rangle, \quad \alpha_2 = \langle x, e_2 \rangle, ..., \quad \alpha_n = \langle x, e_n \rangle$$

et par conséquent :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$

□

3.6 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3.6.1. *Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien et $\{x_n\}$ une famille finie ou infinie de vecteurs linéairement indépendants de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = Vect\{x_0, ..., x_n\}$ le sous-espace vectoriel engendré par $x_0, ..., x_n$. On définie la famille $\{y_n\}$ par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_{n+1} = x_{n+1} - P_{F_n}(x_{n+1}), \end{cases}$$

et on définie la famille $\{e_n\}$ par

$$e_0 = \frac{y_0}{\|y_0\|}, \quad e_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{\|y_{n+1}\|}$$

Alors la famille $\{e_n\}$ est orthonormale et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_n = Vect\{e_0, ..., e_n\}$.

3.7 Théorème de représentation de Riesz

Définition 3.7.1. *Le dual topologique d'un espace de Hilbert H est l'espace des formes linéaires et continues sur H, on le note par H^* (ou H'). On le muni de la norme duale*

$$\|f\|_{H^*} = \sup_{x \in H, \|x\|_H \leq 1} |\langle f, x \rangle|.$$

Théorème 3.7.1 (de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire, soit H^* le dual topologique de H. Alors : " Pour tout $\varphi \in H^*$, il existe un unique élément $y_\varphi \in H$ tel que pour tout $x \in H$, on ait :*

$$\varphi(x) = \langle x, y_\varphi \rangle.$$

De plus

$$\|\varphi\|_{H^*} = \|y_\varphi\|_H.$$

Exemple 3.7.1. *Soit* $H = l^2(\mathbb{N}) = \{(x_n);\quad \sum_{n\geq 0} x_n^2 < \infty\}$ *muni du produit scalaire*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ *fixé, on considère l'application*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : H & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \varphi(x) = x_p \end{array}$$

φ *est linéaire (évidant) et continue, en effet, Soit* $x \in H = l^2(\mathbb{N})$*, alors* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on a*

$$|\varphi(x)| = |x_p| = \sqrt{x_p^2} \leq \sqrt{\sum_{n\geq 0} x_n^2} = \|x\|.$$

de sorte que $\varphi \in H^*$.

On cherche l'unique élément $y_\varphi \in H$ *tel que* $\varphi(x) = \langle y_\varphi, x\rangle$*, On prend*

$$y_\varphi = (0, ..., 1, 0, ...) = e_p$$

on peut voir facilement que $y_\varphi \in l^2(\mathbb{N})$ *avec*

$$\langle y_\varphi, x\rangle = x_p = \varphi(x).$$

Remarque 3.7.1. *Soit* $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espace de Hilbert. Alors le dual topologique* H^* *est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant :*

$$\text{Pour tout } \; y, z \in H : \quad \langle \varphi_y, \varphi_z\rangle^* = \langle z, y\rangle.$$

Notons que ce produit scalaire sur H^* *induit la norme déjà existant sur* H^*.

3.8 Exercices

Exercice 11. *Montrer que les applications suivantes sont des produit scalaires.*

1.

$$\begin{array}{rcl} u_1 : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & = & u_1(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i. \end{array}$$

2. *(*) Soit* $E = C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ *l'espace des fonctions réelles continues sur* $[0,1]$*,*

$$\begin{array}{rcl} u_2 : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & = & u_2(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\, dt \end{array}$$

Exercice 12. 1. *Soit* $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ *; avec* $\|X\|_\infty = \sup\limits_{1\le i\le n} |x_i|$ *et* $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$*.*
Montrer $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ *n'est pas un espace préhilbertien.*

2. *Soit* $E = L^1([-1,1],\mathbb{R})$ *munie de la norme* $\|f\| = \int_{-1}^1 |f(t)|\, dt$ *; montrer que cet espace n'est pas un espace préhilbertien.*

Exercice 13. $E = C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt$.

Considérons la famille des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que*

$$f_n(t) = \cos nt,$$

Montrer que $f_n \perp f_m$*,* $\forall n \neq m$.

Exercice 14. 1. *Trouver* $\{0_E\}^\perp$ *et* $E^\perp$*.*

2. *Soit l'espace* $\mathbb{R}^4$ *muni du produit scalaire canonique et soit* F *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *défini par*

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$$

Calculer $F^\perp$*.*

3. *Soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *muni du produit scalaire* $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt$*. On considère le sous-espace vectoriel* F *de* E *défini par*

$$F = \{f \in E : f(0) = 0\}.$$

Montrer que $F^\perp = \{0\}$*.*

Exercice 15. *Soit* A *une partie non vide de* E*.* $A^\perp$ *est un sous espace vectoriel fermé de* E*.*
Indication : Vérifier d'abord :

$$A^\perp = \bigcap_{y\in A} \{y\}^\perp;$$

Exercice 16. *Soit H un espace de Hilbert et $F = \overline{B}(0,1) = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ la boule fermé dans H. Pour tout $x \in H$ il existe une projection $P_F(x)$ telle que*

$$P_F(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in F; \\ \frac{1}{\|x\|}, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 17. *Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire définie par*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt,$$

pour tout $f, g \in E$. On pose $F = Vect\{1, t\}$, on considère la fonction $f \in E$ définie par $f(t) = e^t$. Calculer $P_F(e^t)$.

Exercice 18. *Déterminer explicitement la quantité :*

$$\alpha = \min_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^1 |x^3 - c - bx - ax^3|^2\, dx$$

Pour cela,

Exercice 19. *Soit l'espace $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_1^1 f(x)g(x)\, dx.$$

On considère la famille $\{x_0 = 1, x_1 = x, x_2 = x^2\}$. On construire une famille orthonormale.

Exercice 20. *Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômiales réelles définies sur $\mathbb{R}^+$ de degré au plus 3 muni du produit scalaires*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}\, dt.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E des fonctions polynômiales réelles définies sur $\mathbb{R}_+$ de degré au plus 2. On note $q_i(X) = X^i$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

1. *Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!$.*
2. *Déterminer une base orthonormale de F.*
3. *Calculer $P_F(X^n)$ et $d(X^n, F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 21. *Soit $H = L^2([0,1])$ l'espace des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\int_0^1 f(x)^2 \, dx < \infty.$$

On admet que $L^2([0,1])$ est un espace de Hilbert quand le munit par le produit scalaire

$$\forall f, g \in H : \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx.$$

1. *Soit T une application définie par*

$$\begin{array}{rcl} T : H & \to & \mathbb{R} \\ f & = & T(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \, dt \end{array}$$

   (a) *Montrer que T est une application linéaire et continue.*

   (b) *Trouver une fonction $g \in H$ telle que $T(f) = \langle f, g \rangle$, (remarquer que g existe et unique ; Justifier ça).*

2. *Soit F une partie de H définie par : $F = \{f \in H : \quad \int_0^1 f(t) \, dt = 0\}$*

   (a) *Montrer que F est un sous espace fermé.*

   (b) *Vérifier que $F = \{g\}^\perp$.*

   (c) *Determiner la projection de la fonction e^t sur F.*

3.9 Corrigé des exercices du chapitre 3

Correction de l'exercice11

Voici une démonstration détaillée pour l'exemple 2.

— Soient $f, g, h \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_2(f + \lambda g, h) &= \int_0^1 (f + \lambda g)(t)h(t) \, dt \\ &= \int_0^1 f(t)h(t) \, dt + \lambda \int_0^1 g(t)h(t) \, dt \\ &= u_2(f, h) + \lambda u_2(g, h). \end{aligned}$$

— u_2 est symétrique d'après la symétrisation de l'intégrale.

— Soient $f \in E$,évident de voir que $u_2(f,f) = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ dt \geq 0$. Supposons que $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\ dt = 0$; comme f est continue sur $[0,1]$, alors $f^2 = 0$ sur $[0,1]$ et par suite $f = 0$ sur $[0,1]$. Ce qui montre que u_2 est défini positive et par conséquent elle défini un produit scalaire.

Correction de l'exercice10

Soient $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

— Si $u = 0$, alors $\langle 0,0\rangle = 0$ et par suite $\sqrt{\langle u,u\rangle} = \|u\| = 0$, si $\|u\| = 0$, alors $\langle u,u\rangle = 0$, d'où $u = 0$.

—

$$\begin{aligned}\|\lambda u\| &= \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u\rangle}\\ &= \sqrt{\lambda^2\langle u,u\rangle}\\ &= |\lambda|\sqrt{\langle u,u\rangle}\\ &= |\lambda|\|u\|.\end{aligned}$$

— En utilisant (3.1.2) on obtient

$$\|u+v\| = \sqrt{\langle u+v, u+v\rangle} \leq \sqrt{\langle u,u\rangle} + \sqrt{\langle v,v\rangle} = \|u\| + \|v\|.$$

Correction de l'exercice12

1. Si on prend
$$X_1 = (1,0,0,...,0), X_2 = (0,1,0,...,0) \in \mathbb{R}^N$$
alors on vera que
$$\|X_1 + X_2\|_\infty^2 + \|X_1 - X_2\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\|X_1\|_\infty^2 + 2\|X_2\|_\infty^2.$$

2. Les deux fonctions suivantes
$$f(t) = 1; t \in [-1,1] \quad g(t) = \begin{cases} -1, & \text{si } t \in [-1,0]\,; \\ t, & \text{si } t \in [0,1]. \end{cases}$$
ne vérifient pas l'identité du parallélogramme.

Correction de l'exercice13

Pour tout $n \neq m$, on a : $\langle f_n, f_m \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \; dt$, en utilisant la formule :

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\langle f_n, f_m \rangle &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)t + \cos(n-m)t \; dt \\
&= \frac{1}{2(n+m)}\sin(n+m)t\Big/_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(n-m)}\sin(n-m)t\Big/_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui montre que $f_n \perp f_m$, $\forall n \neq m$.

Correction de l'exercice14

1. On a : $\{0_E\}^{\perp} = E$ et $E^{\perp} = \{0_E\}$.
2. Soit l'espace $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique et soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

   $$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$$

   par un calcul simple on obtient que $\{v_1 = (-1, 1, -1, 0), v_2 = (-1, 0, 0, 1)\}$ est une base de F, alors en vertu de la proposition 3.2.1

   $$\begin{aligned}
   F^{\perp} &= \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad \langle x, a \rangle = 0; \forall a \in F\} \\
   &= \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad \langle x, v_1 \rangle = 0 \; et \; \langle x, v_2 \rangle = 0\} \\
   &= \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; \quad x_1 - x_2 + x_3 = 0, -x_1 + x_4 = 0\} \\
   &= Vect\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, 1, 0)\}.
   \end{aligned}$$

3. Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) \; dt$. On considère le sous-espace vectoriel F de E défini par

   $$F = \{f \in E : f(0) = 0\}.$$

   On a $F^{\perp} = \{0\}$, en effet, il suffit de montrer que $F^{\perp} \subset \{0\}$. Soit $f \in F^{\perp}$, alors pour tout $g \in F$, on a $\langle f, g \rangle = 0$, en particulier, on remarque que la fonction $g_0 : x \mapsto xf(x)$ apprtient à F car $g_0 \in E$ et $g_0(0) = 0$, donc on a

   $$\langle f, g_0 \rangle = \int_0^1 x|f(x)|^2 \; dx = 0$$

L'application $x \mapsto x|f(x)|^2$ est continue sur $[0,1]$, positive, d'intégrale nulle, elle est donc identiquement nulle. On en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$, et par continuité on a aussi $f(0) = 0$. Ainsi $f = 0$. On a bien montré que $F^\perp = \{0\}$.

Correction de l'exercice15

$0 \in E$ et pour tout $x, x' \in A^\perp, \alpha \in \mathbb{R}$ on a $\alpha u + v \in A^\perp$ car pour tout $y \in A$

$$\langle \alpha x + x', y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle = 0.$$

D'abord, on peut vérifier

$$A^\perp = \bigcap_{y \in A} \{y\}^\perp;$$

en effet : pour tout $x \in A^\perp$, on a

$$\begin{aligned} x \in A^\perp &\Leftrightarrow \forall y \in A : \langle x, y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in A : x \in \{y\}^\perp \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{y \in A} \{y\}^\perp \end{aligned}$$

On considère la forme linéaire

$$\begin{cases} f_y : E \to \mathbb{R}, \\ x \mapsto f_y(x) = \langle x, y\rangle \end{cases}$$

Soit $y \in E$ fixé, pour tout $x \in E$, d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz on a

$$|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| = c\|x\|.$$

donc on peut écrire

$$\{y\}^\perp = \text{kerf} = f^{-1}(\{0\}),$$

alors $\{y\}^\perp$ est fermé et comme l'intersection quelconque des fermés est un fermé on déduit que $A^\perp$ est un fermé.

Correction de l'exercice16

En effet, on utilise deux méthode

1ère méthode (par la définition) : — Si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0 = d(x, P_F(x))$ et par conséquent $P_F(x) = x$.

— Si $x \notin F$, on montre que $d(x,F) = \|x - P_F(x)\| = \|x - \frac{1}{\|x\|}x\|$.

On a :
$$\Big\|x - \frac{1}{\|x\|}x\Big\| = \Big\|\Big(\frac{\|x\|-1}{\|x\|}x\Big)\Big\| = \|x\| - 1.$$

Pour tout $y \in F$, on a :
$$\|x\| - 1 \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|.$$

D'où :
$$\|x\| - 1 \leq d(x,F).$$

Par conséquent :
$$d(x,F) \leq \Big\|x - \frac{1}{\|x\|}x\Big\| = \|x\| - 1.$$

2ème méthode (par la caractérisation) : H est un espace de Hilbert et $\overline{B}(0,1)$ est convexe et fermée, alors la projection existe et unique.

— Si $x \in \overline{B}(0,1)$: $\langle x - x, y - x\rangle = 0 \leq 0, \quad \forall y \in F$.

— Si $x \notin \overline{B}(0,1)$ ($\|x\| > 1$), soit $y \in \overline{B}(0,1)$;($\|y\| \leq 1$:
$$\begin{aligned}\Big\langle x - \frac{1}{\|x\|}x, y - \frac{1}{\|x\|}x\Big\rangle &= \langle x,y\rangle - \|x\| - \frac{1}{\|x\|}\langle x,y\rangle \\ &= \Big(1 - \frac{1}{\|x\|}\Big)\langle x,y\rangle + 1 - \|x\| \\ &\leq \Big(\|x\| - 1\Big)\|y\| + 1 - \|x\| \\ &= (\|x\|-1)(\|y\|-1) \leq 0,\end{aligned}$$

on déduit que $\forall x \notin \overline{B}(0,1)$: $P_F(x) = \frac{1}{\|x\|}x$.

Correction de l'exercice17

Comme E est un espace préhilbertien et F est un sous-espace fermé (car il est de dimension dinie). Alors la projection orthogonale de f sur F existe et unique, donc on le calcule :

— On sait que $P_F(f) \in F = Vect\{1,t\}$ donc il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P_F(f) = \alpha t + \beta$.

— En vertu la caractérisation de la projection orthogonale on a :
$$\langle f - P_F(f), g\rangle = 0, \quad \forall g \in F = Vect\{1,t\}.$$

d'après la proposition 3.2.1-(3), on a :

$$\begin{cases} \langle f - P_F(f), 1 \rangle = 0, \\ \langle f - P_F(f), t \rangle = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \int_0^1 e^t - \alpha t - \beta \; dt = 0, \\ \int_0^1 (e^t - \alpha t - \beta) t \; dt = 0. \end{cases}$$

Par un calcul simple on obtient

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 2e - 1, \\ 2\alpha + 3\beta = 1. \end{cases}$$

on obtient alors : $\alpha = 4e - 3$ et $\beta = -2e + 2$ et par suite :

$$P_F(f) = (4e - 3)t - 2e + 2.$$

Correction de l'exercice18

On considère l'espace des fonctions carées intégrables $L^2([0,1])$, on sait que cet espace est Hilbertien muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t) \; dt, \quad \forall f, g \in L^2([0,1]).$$

On considère $F = \mathbb{R}_2[X] = Vect\{1, x, x^2\}$ qui est un sous-espace vectoriel fermé (car il est de dimension fini).

Alors, d'après le théorème 3.4.2, pour tout $f \in L^2([0,1])$, la projection $P_F(f) \in F$ existe et unique, En particulier, si on prend $f_0(x) = x^3$ alors on peut voir facilement que $f_0 \in L^2([0,1])$.

— On a $P_F(f_0) \in \mathbb{R}_2[X]$ et $P_F(f_0)$ s'écrit sous la forme :

$$P_F(f_0) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2.$$

— grâce à la caractérisation de $P_F(f_0)$, on a

$$\langle f_0 - P_F(f_0), P \rangle = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}_2[X]. \tag{3.9.1}$$

La relation (3.9.1) équivalent à

$$\begin{cases} \langle f_0 - P_F(f_0), 1 \rangle = 0 \\ \langle f_0 - P_F(f_0), x \rangle = 0 \\ \langle f_0 - P_F(f_0), x^2 \rangle = 0 \end{cases}$$

c.à.d.

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}(x^3 - a_0 + b_0x + c_0x^2)\ dx = 0 \\ \int_{-1}^{1}(x^3 - a_0 + b_0x + c_0x^2)x\ dx = 0 \\ \langle\int_{-1}^{1}(x^3 - a_0 + b_0x + c_0x^2)x^2\ dx = 0 \end{cases}$$

on obtient $P_F(f_0) = \frac{3}{5}x$ et par conséquent :

$$\alpha = \|f_0 - P_F(f_0)\|^2 = \int_{-1}^{1} |x^3 - \frac{3}{5}x|^2\ dx = \frac{8}{175}.$$

Correction de l'exercice19

on trace les étapes suivant :

— on a

$$\begin{cases} y_0 = x_0 = 1 \Rightarrow y_0(x) = 1, \\ y_1 = x_1 - P_{F_0}(x_1) \Rightarrow y_1(x) = x - P_{F_0}(x), \quad \text{où } F_0 = Vect\{1\} \\ y_2 = x_2 - P_{F_1}(x_2) \Rightarrow y_2(x) = x^2 - P_{F_1}(x), \quad \text{où } F_1 = Vect\{1, x\}. \end{cases} \tag{3.9.2}$$

— Calcul de $P_{F_0}(x)$ et $P_{F_1}(x^2)$.

On a $P_{F_0} \in F_0(x) = Vect\{1\}$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P_{F_0} = \lambda$.

D'autre part $P_{F_0}(x)$ est caractérisé par :

$$\langle x - P_{F_0}(x), 1\rangle = 0$$

d'où

$$\int_{1}^{1} (x - \lambda)\ dx = 0,$$

et par suite $\lambda = 0$ donc $P_{F_0}(x) = 0$.

On a $P_{F_1}(x^2) \in F_1 = Vect\{1, x\}$ alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $P_{F_1}(x^2) = \alpha x + \beta$.

La projection $P_{F_1}(x^2)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} \langle x^2 - P_{F_1}(x^2), 1\rangle = 0, \\ \langle x^2 - P_{F_1}(x^2), x\rangle = 0. \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \int_{1}^{1}(x^2 - \alpha x - \beta)\ dx = 0, \\ \int_{1}^{1}(x^2 - \alpha x - \beta)x\ dx = 0, \end{cases}$$

après les calcules on obtient $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{3}$ et donc $P_{F_1}(x^2) = \frac{1}{3}$.

— On remplace dans (3.9.2) et on trouve

$$\begin{cases} y_0(x) = 1, \\ y_1(x) = x, \\ y_2(x) = x^2 + \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Enfin, on calcule $\|y_0\|$, $\|y_1\|$ et $\|y_2\|$: On a

$$\begin{cases} \|y_0\|^2 = \int_1^1 1^2 \, dx = 2 \Rightarrow \|y_0\| = \sqrt{2}, , \\ \|y_1\|^2 = \int_1^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \|y_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \\ \|y_2\|^2 = \int_1^1 (x^2 + \frac{1}{3})^2 \, dx = \frac{16}{15} \Rightarrow \|y_2\| = \frac{4}{\sqrt{15}}. \end{cases}$$

Par conséquent $\{e_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, e_2 = \frac{\sqrt{15}}{4}(x^2 + \frac{1}{3})\}$ est famille orthonormale, de plus $Vect\{1, x, x^2\} = Vect\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \frac{\sqrt{15}}{4}(x^2 + \frac{1}{3})\}$.