Chapitre 1

Grandeurs physiques, erreurs et incertitudes

1.1 Définition d'une grandeur physique

On appelle grandeur physique toute propriété de la science qui peut être mesurée ou calculée. La grandeur physique est caractérisée par une unité et une dimension.

Il existe deux types de mesure à savoir la mesure directe et la mesure indirecte.

a. Mesure directe

On appelle mesure directe un résultat qui est obtenu directement à partir d'un appareille de lecture. Exemple, la mesure de la masse avec une balance ou bien la mesure de la résistance électrique avec un ohmmètre.

b. Mesure indirecte

On appelle mesure indirecte un résultat obtenu par un calcul (relation mathématique). Par exemple, si nous ne disposons pas d'un ohmmètre pour mesurer directement la résistance, on peut alors placer cette résistance dans un circuit électrique et mesurer la tension V_s entre ses bornes et le courant I_s qu'il a travers, et puis en appliquant la loi d'home pour calculer sa valeur $\left(R_S = \frac{V_S}{I_S}\right)$.

1.2 Grandeurs scalaires et vectorielles

La mesure d'une grandeur scalaire est exprimée par un simple nombre algébrique; par exemple : la température dans la salle. En revanche, une grandeur vectorielle est représentée par un ensemble de nombre (vecteur, matrice, tenseur); par exemple la position d'un point dans l'espace est représentée par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

1.3 Les grandeurs fondamentales (de base)

Lors de la Conférence Générale des Poids et Mesures en1972, les physiciens on adopté une liste de grandeurs dites fondamentales. Le système international des unités fondamentales (abrégé SI) est constitué de sept unités de base et dont toutes les autres grandeurs sont des dérivées. Le **Tableau 1** regroupe les unités de base, leurs abréviation, leurs unités ainsi que leurs dimensions.

Par analyse dimensionnelle, les unités dérivées se déduisent à partir des sept dimensions fondamentales par produit ou division de ses dimensions.

Nom de la grandeur	Unité dans le SI		Dimension
	Nom	Abréviation	
Longueur	Mètre	m	L
Masse	Kilogramme	kg	M
Temps	Seconde	s	T
Température	Kelvin	K	θ
Quantité de matière	Mole	mol	N
Intensité électrique	Ampère	A	I
Intensité lumineuse	Candela	Cd	J

a. Quelques exemples des unités dérivées

Nom de la grandeur	Unité dans le SI		Définition de l'unité dans le SI
	Nom	Abréviation	
Volume	Mètre cube	m^3	m^3
Force	Newton	N	$Kg\ m\ s^{-2}$
Energie	Joule	J	$Kg\ m^2\ s^{-2}$
Pression	Pascal	Pa	$Kg\ m^{-1}\ s^{-2}$
Potentiel électrique	Volt	V	$Kg\ m^{-2}\ s^{-3}\ A^{-1}$
Puissance électrique	Watt	W	$Kg\ m^2\ s^{-3}$

1.4 Analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une technique qui permet de déduire l'unité d'une grandeur à partir d'une relation mathématique. Une relation physique n'a de sens que si les deux expressions de part et d'autre de l'égalité ainsi que chaque terme additif de ces expressions ont même dimension, autrement dit que toute formule inhomogène est nécessairement fausse. La vérification de l'homogénéité des relations physique doit devenir un réflexe pour l'étudiant.

Remarques

i. La dimension d'une gradeur physique G est symbolisée par $[G]$.

ii. L'addition et la soustraction des grandeurs physique (A, B, C, etc.) n'est possible que si les grandeurs ont les mêmes dimensions.

$$A = B + C \Rightarrow [A] = [B] = [C] \quad (1.1)$$

$$A = B - C \Rightarrow [A] = [B] = [C] \quad (1.2)$$

iii. On peut diviser ou multiplier des grandeurs physiques de dimensions différentes et on obtient une nouvelle grandeur dérivée par exemple :

La dimension de la vitesse $v = \frac{x}{t}$ est $[v] = [x][t] = LT^{-1}$, donc son unité est $m\ s^{-1}$.

La dimension de l'énergie $E = \frac{1}{2} m\, v^2$ est $[E] = [m][v]^2 = ML^2T^{-2}$ et son unité est: $kg\ m^2\ s^{-2}$=J.

La dimension du volume d'un parallélépipède rectangle $V = a \times b \times c$ est $[V] = [a]\ [b]\ [c] = L^3$, et son unité est le m^3.

iv. La dimension d'une grandeur sans unité, dite adimensionnel, est égale à 1, par exemple la dimension de l'indice de réfraction n, de log x, de e^x, de $cos\theta$, de $\sin\theta$, etc sont toutes égales à 1.

v. La dimension de l'angle θ, de l'angle solide Ω et de la constante π est égale aussi à 1.

1.5 Les erreurs et les incertitudes

L'erreur est la différence entre la valeur mesurée et la valeur exacte de la grandeur que l'on mesure. Pratiquement, il est impossible d'effectuer une mesure parfaite, et donc la valeur exacte n'existe pas.

1.5.1 L'incertitude absolue

L'incertitude absolue est l'écart maximum entre la mesure et la valeur exacte. Autrement dit, l'incertitude absolue de mesure d'une grandeur X, notée ΔX est un paramètre qui permet de définir un intervalle de valeurs probables de la grandeur X. L'incertitude absolue est une valeur positive exprimée dans les unités de la grandeur mesurée X.

La qualité d'une mesure sera d'autant meilleure que l'incertitude absolue associée sera petite.

La mesure d'une grandeur physique est exprimée comme suit:

$$X = (\bar{X} \mp \Delta X) + \ l'unité \quad (1.3)$$

Avec $\bar{X}$ est la valeur la plus proche de la valeur exacte autrement dit la valeur la plus probable, et ΔX est l'incertitude absolue.

La valeur de la mesure est située dans l'intervalle fermé $[\bar{X} - \Delta X, \bar{X} + \Delta X]$, cet intervalle est dit intervalle de confiance.

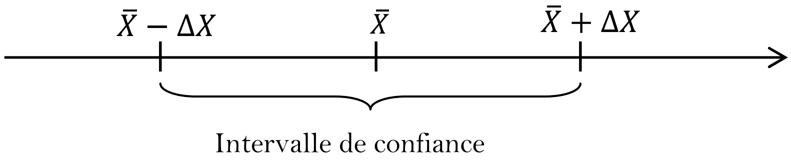

Figure 1

1.5.2 Incertitude relative

L'incertitude relative exprime la qualité ou la précision d'une mesure. Elle est symbolisée par la lettre ε, exprimée en pour cent (%) et donnée par le quotient de l'incertitude absolue par la grandeur mesurée:

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\ \% \qquad (1.4)$$

Notons que plus ce rapport est faible plus la mesure est précis.

1.5.3 Quelques instructions pour le calcul des incertitudes

a. L'addition

Si C est une grandeur physique obtenue par l'addition de deux grandeurs mesurées A et B, l'incertitude absolue sur C est la somme des incertitudes absolues sur A et sur B:

$$C = A + B \Rightarrow \Delta C = \Delta A + \Delta B \qquad (1.5)$$

b. La soustraction

Si C est une grandeur physique obtenue par la soustraction de deux grandeurs mesurées A et B, l'incertitude absolue sur C est la somme des incertitudes absolues sur A et sur B:

$$C = A - B \Rightarrow \Delta C = \Delta A + \Delta B \qquad (1.6)$$

c. La multiplication

Si C est une grandeur physique obtenue par la multiplication de deux grandeurs mesurées A et B, l'incertitude relative sur C est la somme des incertitudes relatives sur A et sur B:

$$C = A \times B \Rightarrow \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \qquad (1.7)$$

c. La division

Si C est une grandeur physique obtenue par la division de deux grandeurs mesurées A et B, l'incertitude relative sur C est la somme des incertitudes relatives sur A et sur B:

$$C = \frac{A}{B} \Rightarrow \frac{\Delta C}{C} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} \qquad (1.8)$$

c. La puissance

Si B est une grandeur physique qui est égale à une grandeur mesurée A à la puissance n, l'incertitude relative sur C est le produit de la valeur absolue de n et l'incertitude relative sur A:

$$B = A^n \Rightarrow \frac{\Delta B}{B} = |n|\frac{\Delta A}{A} \qquad (1.9)$$

A retenir :

a. Dans le cas de l'addition et de la soustraction, l'incertitude absolue est égale à la somme des incertitudes absolues.

b. Dans le cas de la multiplication et de la division, l'incertitude relative est égale à la somme des incertitudes relatives.

Application

1. Déterminer la position $(x \mp \Delta x)$ à l'instant $t = (4.18 \mp 0.01)s$ d'un point matériel qui se déplace avec un mouvement rectiligne uniformément varié: $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$ avec l'accélération $a = (2.10 \mp 0.01)\ ms^{-2}$, la vitesse initiale $v_0 = (3.15 \mp 0.01)ms^{-1}$, la position à $t_0 = 0\ s$ et $x_0 = (1.50 \mp 0.01)\ m$.

2. Déduire la dimension et l'unité de l'accélération *a*.

Solution

1.a. Calcul de la position x à l'instant $t = 4.18\ s$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

A.N. : $x = \frac{1}{2}2.10 \times (4.18)^2 + 3.15 \times 4.18 + 1.50 = 33\ m.$

1.b. Calcul de l'incertitude absolue Δx

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$, posant $x = A + B + C$ alors $\begin{cases} A = \frac{1}{2}at^2 \\ B = v_0t \\ C = x_0 \end{cases}$

$$x = A + B + C \Rightarrow \Delta x = \Delta A + \Delta B + \Delta C$$

i. $A = \frac{1}{2}at^2$, alors $\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta t}{t}$

ii. $B = v_0 t$, alors $\frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta v_0}{v_0} + \frac{\Delta t}{t}$ A.N. : $\begin{cases} \Delta A = 0.17\ m \\ \Delta B = 0.07\ m \\ \Delta C = 0.01\ m \end{cases}$

iii. $C = x_0$, alors $\Delta C = \Delta x_0$

Donc $\Delta x = 0.17 + 0.07 + 0.01 = 0.25\ m$, et la position du mobile s'écrit comme suit :

$x = (3300 \mp 25) \times 10^{-2}\ m.$

2. La dimension de l'accélération $[a]$

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ alors $[x] = \left[\frac{1}{2}at^2\right] = [v_0 t] = [x_0]$

On prend $[x] = \left[\frac{1}{2}at^2\right] \Rightarrow [x] = [a][t]^2$

$[a] = [x][t]^{-2} = LT^{-2}$ et par conséquence l'unité de *a* est ms^{-2}.

1.6 La représentation graphique, les rectangles d'incertitudes (les barres d'erreurs)

Un point expérimental est défini par le couple (x_0, y_0). Les incertitudes absolues sur x et sur y sont respectivement Δx_0 et Δy_0. La représentation graphique de ce point avec les rectangles d'incertitudes est schématisée sur la **Figure 2** ci-dessous :

La zone grise correspond à l'aire d'incertitude du point expérimental (x_0, y_0). Si l'une des incertitudes absolues Δx_0 ou Δy_0 est très faible on parlera alors de barres d'erreurs.

Une fois mis les rectangles d'erreur, on trace manuellement la meilleure courbe passant au mieux dans tous les rectangles d'incertitude.

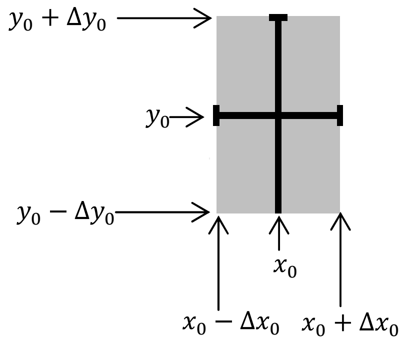

Figure 2

Exercice d'application

On cherche à déterminer la valeur d'une résistance R en utilisant la loi d'Hom. Pour cela on va réaliser le montage de la **Figure 3** ci-dessous. Dans ce montage on varie la tension du générateur, puis on lie la tension V et le courant I sur le voltmètre et l'ampèremètre. Les résultats de mesure obtenus sont reportés dans le tableau ci-dessous.

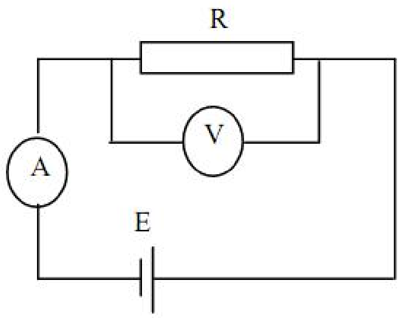

Figure 3

i. Calcul de la valeur de la résistance R

D'après la loi d'Hom $V = RI$ alors $R = \frac{V}{I}$.

ii. Calcul de l'incertitude absolue ΔR *de la résistance R*

$R = \frac{V}{I}$ alors $\Delta R = R\left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I}\right)$

iii. Calcul de la valeur moyenne de la résistance $\overline{R}$

$\overline{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{R_i}$

Avec *i* est le numéro de la mesure et *n* est le nombre total des mesures.

Dans la dernière colonne du tableau $\Delta R = \max \Delta R_i$

V (V)	ΔV (V)	I (A)	ΔI (A)	R_i (Ω)	ΔR_i (Ω)	$(R_i \mp \Delta R_i)(\Omega)$	$(\bar{R} \mp \Delta R)(\Omega)$
0.9	0.01	0.1	0.001	9.00	0.59	9.00 ∓ 0.59	8.92 ∓ 0.87
1.2	0.05	0.15	0.008	8.00	0.76	8.00 ∓ 0.76	
1.82	0.05	0.2	0.008	9.10	0.61	9.10 ∓ 0.61	
2.3	0.06	0.25	0.009	9.20	0.57	9.20 ∓ 0.57	
2.7	0.06	0.3	0.01	9.00	0.50	9.00 ∓ 0.50	
3.2	0.07	0.35	0.01	9.14	0.46	9.14 ∓ 0.46	
3.6	0.08	0.4	0.03	9.00	0.87	9.00 ∓ 0.87	

iv. Détermination de la valeur de la résistance R à partir du graphe $V = f(I)$

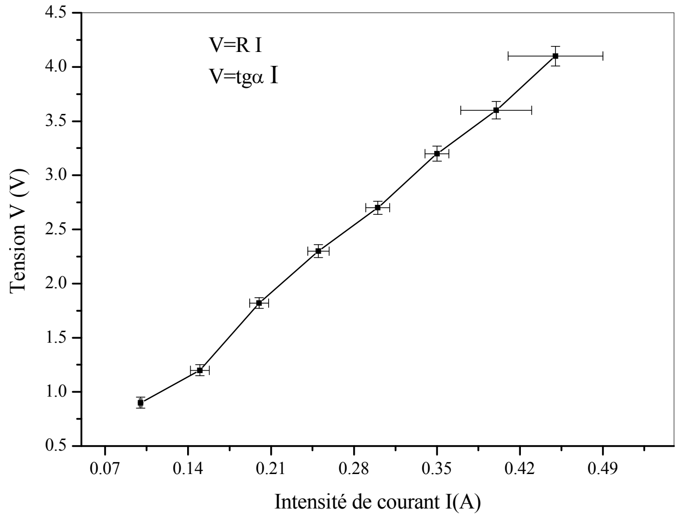

Figure. 4 : Variation de la tension V en fonction de l'intensité de courant

$V = f(I)$ est une ligne droite qui passe par l'origine de pente $tg\alpha = 9.30\ \Omega$.. L'équation de cette droite est $V = \ tg\alpha\ I$, alors $V = 9.30\ \times I$.

Par comparaison avec la loi d'Hom on obtient $R = \ 9.30\ \Omega$ et $\Delta R = 0.06\ \Omega$.

$R = (9.30 \mp 0.06)\ \Omega$.