Série 1: Analyse Dimensionnelle & Calcul des incertitudes

Exercice1

Déterminer la dimension et l'unité des grandeurs physiques suivantes :

1. Du volume V. Le volume V d'une sphère est donné par $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; R est le rayon de la sphère.
2. De la masse volumique ρ. La masse volumique d'un corps est donnée par $\rho = \frac{m}{V}$, m et V sont respectivement le volume et la masse de ce corps.
3. De la constante de la gravitation G sachant que $F = \frac{G\, m\, m'}{R^2}$; F : est une force, m et m' sont des masses et R est la distance qui sépare les deux masses.
4. De la pression hydrostatique P. P est donnée par :$P = \rho\ g\ h$; ρ : est la masse volumique, g : l'accélération de la pesanteur et h est une hauteur.
5. De la constante des gaz parfaits R sachant que $PV = nRT$, P : est la pression, V est le volume, n : le nombre de moles et T est la température du gaz parfait.
6. De la constante de Planck h, tel que $E = \frac{hC}{\lambda}$; E, C et λ sont respectivement l'énergie, la vitesse de la lumière dans le vide et la longueur d'onde.

Exercice 2

L'équation de Vander Walls caractérise l'état de n mole de gaz réel occupant un volume V à une pression P et à une température T : $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = n\,RT$; R : est la constante des gaz parfaits.

1. Déterminer les dimensions et les unités des grandeurs ***a*** et ***b***.
2. Vérifier que la dimension et l'unité de R sont les mêmes que celles trouvés dans l'exercice 1 (Question5).

Exercice 3

1. La vitesse v d'un corps est exprimée par : $v = At^2 - Bt + \sqrt{C}$, t est le temps. Trouvez les dimensions et les unités des grandeurs A, B et C.
2. La loi de désintégration d'un noyau radioactif est donnée par : $A = A_0\, e^{-\lambda t}$, où t est le temps, λ est la constante de désintégration, A et A_0 sont les activités radioactives du noyau respectivement à l'instant t et t_0. Trouver la dimension et l'unité de λ et déduire la dimension de A sachant que $[A_0] = T^{-1}$.

Exercice 4

La variation de la résistivité électrique ρ d'un fil conducteur en fonction de sa résistance R est donnée par la formule : $\rho = \left(\frac{s}{l}\right) R$. s et l sont respectivement la surface de conduction et la longueur du fil.

Déterminer l'incertitude absolue et relative commises sur la mesure de la résistivité électrique d'un fil de longueur $l = (2.0000 \pm 0.0001)\, m$, de diamètre $d = (0.30 \pm 0.01\,) mm$ et de résistance $R = (0.4562 \pm 0.0002)\, \Omega$.

Exercice 5

On donne x = 23.5 ± 0.5, y = 6.8 ± 0.1 et z = 0.052 ± 0.003

1. Calculer les valeurs des grandeurs physiques reportées dans le tableau ci-dessous.
2. Déterminer ses incertitudes absolue et relative, et exprimer correctement la valeur en arrondissant les chiffres là où il faut.

A = x + y, $\mathbf{A \pm \Delta A} =$, $\frac{\mathbf{\Delta A}}{\mathbf{A}} =$	D = xy/z $\mathbf{D \pm \Delta D} =$, $\frac{\mathbf{\Delta D}}{\mathbf{D}} =$	G = 4πx³ / 3, $\mathbf{G \pm \Delta G} =$, $\frac{\mathbf{\Delta G}}{\mathbf{G}} =$
B = yz, $\mathbf{B \pm \Delta B} =$, $\frac{\mathbf{\Delta B}}{\mathbf{B}} =$	E = ln (x/z), $\mathbf{E \pm \Delta E} =$, $\frac{\mathbf{\Delta E}}{\mathbf{E}} =$	H = $(x)^{-1/2}$, $\mathbf{H \pm \Delta H} =$, $\frac{\mathbf{\Delta H}}{\mathbf{AH}} =$
C = y - xz, $\mathbf{C \pm \Delta C} =$, $\frac{\mathbf{\Delta C}}{\mathbf{C}} =$	F = x²z -3y $\mathbf{F \pm \Delta F} =$, $\frac{\mathbf{\Delta F}}{\mathbf{F}} =$	$K = \sqrt{z}$, $\mathbf{K \pm \Delta K} =$, $\frac{\mathbf{\Delta K}}{\mathbf{K}} =$

Exercice 6 (supplémentaire)

Déterminer les dimensions des grandeurs physiques suivantes :

a. De l'énergie cinétique $E = \frac{1}{2} mV^2$, m et V sont respectivement la masse et la vitesse.

b. De la concentration molaire $C = \frac{n}{V}$, n et V sont respectivement le nombre de mole et le volume.

c. De la pression $P = \frac{F}{S}$, F et S sont respectivement la force et l'unité de surface.

d. De la constante des gaz parfaits R, tel que $PV = nRT$, avec P, V, n et T sont respectivement la pression, le volume, le nombre de mole et la température.

e. De la constante de Boltzmann K_B , tel que $E_{th} = \frac{3}{2} K_B T$, où E_{th} et T sont respectivement l'énergie thermique et la température.

f. De l'indice de réfraction d'un milieu $n = \frac{C}{V}$, où C et *V* sont respectivement les vitesses de la lumière dans le vide et dans le milieu.

g. De la charge électrique Q, tel que $I = \frac{dQ}{dt}$, où dI et dt sont respectivement les dérivées de l'intensité du courant électrique et le temps.

h. De l'accélération *a*, tel que $x = \frac{1}{2} a\, t^2 + V_0\, t$, où *x*, *t* et V_0 sont respectivement la distance, le temps et la vitesse initiale.

Exercice 7 (supplémentaire)

1. Déterminer la dimension du champ électrique E, tel que $F = qE$, où F et q sont respectivement la force et la charge.

2. Déterminer la dimension de la grandeur $S = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2 \cos\theta}$, sachant que $[V_1] = [V_2] = L$.

3. Déterminer les dimensions des deux paramètres α et β qui apparaissent dans la loi :

$F = \alpha m\, V + \beta V^2$, F est la force, m est la masse et V est la vitesse.

4. Vérifier l'homogénéité de l'équation suivante : $x = w\, V_0 \left(\frac{d}{V_0}\right)^2 sin\lambda$, où x et d sont des distances, V_0 est une vitesse, λ est un angle et *w* est la vitesse angulaire (on donne$w = \frac{V}{R}, V\ est\ la\ vitesse\ linéaire\ et\ R\ est\ le\ rayon\ de\ rotation$).

Solution des exercices de la série 1

Exercice 1

1. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ alors $[V] = [R]^3 = L^3$. L'unité de V est m^3

2. $\rho = \frac{m}{V}$ alors $[\rho] = [m][V]^{-1} = M\, L^{-3}$. L'unité de ρ est Kg m^{-3}.

3. $F = \frac{G\, m\, m'}{R^2}$ donc $G = \frac{F\, R^2}{m\, m'}$ alors $[G] = [F][R]^2[m]^{-2}$.

$[F] = [m][a] = M\, L\, T^{-2}$

$[G] = M\, L\, T^{-2}\, L^2 M^{-2} = \ T^{-2}\, L^3 M^{-1}$, l'unité de G est : s^{-2} m^3 Kg^{-1}.

4. $P = \rho\ g\ h$ alors $[P] = [\rho][g][h] = M\, L^{-3}\, L\, T^{-2}\, L = \ M \ \ L^{-1}T^{-2}$. L'unité de P est : Kg m^{-1} s^{-2}

5. $PV = nRT$ donc $R = \frac{P\, V}{nT}$ alors $[R] = [P][V][n]^{-1}[T]^{-1} = \ M \ \ L^{-1}T^{-2}.\ L^3\ N^{-1}\theta^{-1} =$ $ML^2\ \ T^{-2}\ \ N^{-1}\theta^{-1}$, l'unité de R est : Kg m^2 s^{-2} mol^{-1} K^{-1}.

6. $E = \frac{hC}{\lambda}$ donc $h = \frac{E\, \lambda}{C}$ alors $[h] = [E][\lambda][C]^{-1}$

$E = \frac{1}{2}\ m\, v^2$ donc $[E] = [m][v]^2$

$[h] = [E][\lambda][C]^{-1} = [m][v]^2[\lambda][C]^{-1} = [m][v][\lambda] = M\ LT^{-1}\ L = M\ L^2\ T^{-1}$

L'unité de h : Kg m² s⁻¹.

Exercice 2

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=n\,RT$$

a. $[P]=\left[\frac{a}{V^2}\right]=[a][V]^{-2}$ ce qui implique que $[a]=[P][V]^2=M\quad L^{-1}T^{-2}L^6\;=ML^5T^{-2}$

(l'homogénéité de l'équation)

L'unité de a est : Kg^2 m^5 s^{-2}.

b. $[b]=[V]=L^3$ l'unité de b est : m^3 (l'homogénéité de l'équation)

c. $[R]=\;ML^2\;T^{-2}\;N^{-1}\theta^{-1}$, l'unité de R est : Kg m^2 s^{-2} mol^{-1} K^{-1}.

Exercice 3

1.$[v]=[A][t]^2$ donc $[A]=[v][t]^{-2}=L\,T^{-1}\,T^{-2}=L\,T^{-3}$, l'unité de A est : ms^{-3}

2.$[v]=[B][t]$ donc $[B]=[v][t]^{-1}=L\,T^{-1}\,T^{-1}=L\,T^{-2}$, l'unité de B est : m s^{-2}

3.$\left[\sqrt{C}\right]=[v]$ donc $[C]=[v]^2=L^2T^{-2}$, l'unité de C est : m^{2}s^{-2}.

4.$A=A_0\,e^{-\lambda\,t}$, la dimension $\left[e^{-\lambda t}\right]=1$ alors la dimension de $[\lambda t]=1$ donc $[\lambda]=[t]^{-1}=\;T^{-1}$, et l'unité de λ est s^{-1}. La dimension de $[\lambda]=[\lambda_0]=\;T^{-1}$ et son unité est s^{-1}.

Exercice4

$\rho=\left(\frac{s}{l}\right)\,R, \rho=1.61\times10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$. $\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\Delta s}{s}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta R}{R}=\frac{2\Delta d}{d}+\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta R}{R}=0.067$

$\frac{\Delta\rho}{\rho}=6.7\%$ alors $\Delta\rho=1.080\times10^{-9}\,\Omega\,\mathrm{m}$

$\rho=1.61\times10^{-8}\pm1.08\times10^{-9}\Omega\,\mathrm{m}$, alors $\rho=(1.61\pm0.11)\times10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

Exercice 5

On donne x = 23.5 ± 0.5, y = 6.8 ± 0.1 et z = 0.052 ± 0.003

A = x + y $\Delta A=\Delta x+\Delta y$	D = xy/z , $\Delta D=D\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}\right)$	G = 4πx³ / 3 $\Delta G=G\left(3\frac{\Delta x}{x}\right)$
B = yz $\Delta B=B\left(\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}\right)$	E = ln (x/z) $\Delta E=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta z}{z}$	H = (x)$^{-1/2}$ $\Delta H=H\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{x}\right)$
C = y - xz $\Delta C=\Delta y+xz\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta z}{z}\right)$	F = x²z -3y $\Delta F=x^2z\left(\frac{2\Delta x}{x}+\frac{\Delta z}{z}\right)+\Delta y$	$K=\sqrt{z}$ $\Delta K=K\left(\frac{1}{2}\frac{\Delta z}{z}\right)$

Application numérique

30.3 ± 0.6 1.98 %	3073.08 ± 287.57 9.35 %	54361.59 ± 3469.89 99 %
0.3536 ± 0.0003 0.09 %	1.24 ± 0.079 6.36 %	0.206 ± 0.003 1.45 %
5.578 ± 0.196 3.51 %	8.317 ± 2.978 35.8 %	0.228 ± 0.007 2.88 %