Série 4 : Phénomène de diffusion

Exercice 1

Deux compartiments A et B sont séparés par une membrane perméable aux molécules de glucose et d'épaisseur $\Delta x = 0.1$ mm.

Les deux compartiments A et B contiennent des solutions de glucose respectivement à 36 et 18 g/l.

On suppose que les molécules de glucose ont une forme sphérique et de rayon r=3 Å. Le coefficient de viscosité de glucose $\eta = 10^{-3}$ poiseuille et sa masse molaire est égale à 180 g/mol.

Calculer le flux massique et molaire initial de diffusion du glucose à 25 et à 0 °C.

Exercice 2

Soit deux compartiments (I et II) de volume égaux séparés par une membrane perméable aux molécules d'hémoglobine de surface $S = 5\ cm^2$ et d'épaisseur $\Delta x = 3$ cm. Le compartiment I contient une solution d'hémoglobine de concentration 2×10^{-4} mol/l et le compartiment II contient de l'eau pure. Après 5 minutes de diffusion la concentration d'hémoglobine dans le compartiment I devient 1.2×10^{-4} mol/l. On donne le coefficient de diffusion d'hémoglobine $D = 6.9\times10^{-7}\ cm^2/s$ et sa masse molaire $M = 68\times10^3$ g/mol.

Calculer la masse d'hémoglobine qui s'est déplacée vers le compartiment II en µg.

Exercice 3

Deux cuves (I et II) séparées par une membrane perméable aux molécules d'urée et du glucose de surface $S = 200\ cm^2$ et d'épaisseur $\Delta x = 0.12$ mm. La première cuve a un volume $V_1 = 1.6$ l dans lequel on dépose 0.5 mol d'urée et le volume de la deuxième est $V_2 = 1.4$ l dans lequel on déposé 0.8 mol de glucose. Les coefficients de diffusion de l'urée et de glucose sont respectivement 1×10^{-9} et $0.69\times10^{-9}\ m^2s^{-1}$.

1. Calculer le débit molaire initial de l'urée et celui du glucose.
2. Calculer la concentration de l'urée à l'équilibre et celle du glucose.
3. Si on suppose que le débit molaire du glucose est constant et égale à son débit initial, dans ce cas, calculer le temps nécessaire pour que le glucose atteint son équilibre.

Exercice 4

Un récipient est divisé en deux compartiments A et B par une membrane perméable aux molécules de glucose. L'épaisseur de la membrane est $\Delta x = 0.5$ mm.

Le compartiment A contient 1 l d'une solution aqueuse de glucose à 1 mol/l et le compartiment B contient 1l d'eau pure.

1. Si on considère qu'au bout d'une minute la masse du glucose qui s'est déplacée vers le compartiment B est m= 0.2 g, calculer le flux de glucose à cet instant. On donne $D_{glucose}=8.58\times10^{-6}$ cm^{2}s^{-1}.
2. Calculer le coefficient de diffusion du lactose $D_{lactose}$.

On donne $M_{glucose}=180$ et $M_{lactose}=342$ g/mol.

Exercice 5

On réalise une dialyse rénale chez un patient présentant une urémie de 3 g/l. La membrane du dispositif du rein artificiel a une surface S= 3 m^2 et la longueur moyenne de ses pores $\Delta x=0.12$ mm. Le coefficient de diffusion de l'urée $D_{urée}= 10^{-9}$m^{2}s^{-1}.

1. Calculer le flux molaire initial de diffusion de l'urée.
2. Calculer le temps nécessaire (en heures) pour diminuer l'urémie à 0.3 g/l sachant que la variation de la concentration de l'urée en fonction du temps C(t) suit la loi exponentielle :

$$C(t) = C_0\, exp - (DS/V_0\Delta x)t$$

Avec V_o est le volume à épurer qu'on admettra égale à 50 l.

3. Si ce patient est soumis à une séance de dialyse péritonéale, quel serait le nombre de sacs nécessaires pour diminuer l'urémie à 0.3 g/l. Le volume du sac est égal à 2l.

Solution des exercices de la série 4

Exercice 1

C_{pt}^{A} 36 g/l	C_{pt}^{B} 18 g/l

1. Calcul du flux massique

$$\phi_{massique} = \frac{1}{S}\frac{dm}{dt} = -D\frac{\Delta C_p}{\Delta x}$$

La diffusion se fait du C_{pt}^{A} vers C_{pt}^{B} donc :

$$\frac{\Delta C_p}{\Delta x} = \frac{C_p^B(t=0) - C_p^A(t=0)}{\Delta x}$$

$$D = \frac{K_B T}{6\pi\eta r}$$

$$\phi_{massique}(initial) = \frac{1}{S}\frac{dm}{dt}_{initial} = -\left(\frac{K_B T}{6\pi\eta r}\right)\frac{C_p^B(t=0) - C_p^A(t=0)}{\Delta x}$$

Pour T=0 °C :

$$\phi_{massique}(initial) = -\left(\frac{1.38\times10^{-23}(0+273)}{6\times\pi\times10^{-3}\times3\times10^{-10}}\right)\left(\frac{(18-36)\times10^{3}}{0.1\times10^{-3}}\right) = 0.1199\ g/s$$

Pour T=25 °C :

$$\phi_{massique}(initial) = -\left(\frac{1.38\times10^{-23}(25+273)}{6\times\pi\times10^{-3}\times3\times10^{-10}}\right)\left(\frac{(18-36)\times10^{3}}{0.1\times10^{-3}}\right) = 0.1309\ g/s$$

2. Calcul du flux molaire

$$\phi_{molaire} = \frac{1}{S}\frac{dn}{dt} = -D\frac{\Delta C}{\Delta x}$$

$$\phi_{molaire}(initial) = \frac{1}{S}\frac{dn}{dt}_{initial} = -\left(\frac{K_B T}{6\pi\eta r}\right)\frac{C^B(t=0)-C^A(t=0)}{\Delta x}$$

Pour T=0 °C :

$$\phi_{molaire}(initial) = -\left(\frac{1.38\times10^{-23}(0+273)}{6\times\pi\times10^{-3}\times3\times10^{-10}}\right)\left(\frac{(18-36)\times10^{3}}{0.1\times10^{-3}\times180}\right)$$
$$= 6.66\times10^{-4}\ mol/s$$

Pour T=25 °C :

$$\phi_{molaire}(initial) = -\left(\frac{1.38\times10^{-23}(25+273)}{6\times\pi\times10^{-3}\times3\times10^{-10}}\right)\left(\frac{(18-36)\times10^{3}}{0.1\times10^{-3}\times180}\right)$$
$$= 7.27\ \times10^{-4}\ mol/s$$

Exercice 2

$$\frac{dm}{dt} = -DS\frac{\Delta C_p}{\Delta x}$$

Après 5 min de diffusion $C_{pt}^{I}=1.2\times10^{-4} mol/l$ et $C_{pt}^{II}=(2\times10^{-4}-1.2\times10^{-4}) mol/l$

$$\Delta m = -DS\frac{\Delta C_p}{\Delta x}\Delta t$$

Le sens de diffusion est du C_{pt}^{I} vers C_{pt}^{II} , alors :

$$\Delta m = -DS\frac{\Delta C_p}{\Delta x}\Delta t = -DS\frac{\left(C_p^{II}(t=5\text{min})-C_p^{I}(t=5\text{min})\right)}{\Delta x}\Delta t$$

$$\Delta m = -6.9\times10^{-7}\times5$$
$$\times\frac{\left(\left((2\times10^{-4}-1.2\times10^{-4})\right)-(1.2\times10^{-4})\right)\times68\times10^{3}\times10^{-3}}{3}$$
$$\times(5\times60) = 0.93\ \mu g$$

Exercice 3

1. La diffusion de l'urée se fait de I vers II, donc

$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{initial\ de\ l'urée} = -D_{uré}S\left(\frac{C_{II}^{uré}-C_{I}^{uré}}{\Delta x}\right) = 1\times10^{-9}\times200\times10^{-4}\left(\frac{0-(0.5/1.6)}{0.12\times10^{-3}}\right)\times10^{3} =$

$5.2\times10^{-5}mol/s$

La diffusion du glucose se fait de II vers I, donc

$\left(\frac{dn}{dt}\right)_{initial\ glu} = -D_{gluc}S\left(\frac{C_{I}^{gl}-C_{II}^{gl}}{\Delta x}\right) = 0.69\times10^{-9}\times200\times10^{-4}\left(\frac{0-(0.8/1.4)}{0.12\times10^{-3}}\right)\times10^{3} =$

$6.6\times10^{-5}mol/s$

2. Calcul des concentrations molaires à l'équilibre

$$C_{Eq}^{Uré} = \frac{0.5}{1.6+1.4} = 0.16\,mol/l$$

$$C_{Eq}^{Gl} = \frac{0.8}{1.6+1.4} = 0.26\frac{mol}{l}$$

2. Calcul du temps nécessaire pour que le glucose atteint son équilibre

Le nombre de mole du glucose qui a traversé la membrane est $0.26\times1.6 = 0.416\,mol$

Le débit initial du glucose est égal à $6.6\times10^{-5}mol/s$

$6.6\times10^{-5}mol \rightarrow 1\,s$

$0.416\,mol \rightarrow t$ Alors $t = \frac{0.416}{6.6\times10^{-5}} = 6303s$=1.75h

Exercice 4

La masse du glucose qui s'est déplacée du CptA vers CptB durant 1 min est 0.2 g, cette masse correspond à une concentration $C_B(\,t=1\text{ min}) = \frac{0.2}{180\times1} = 0.0011\,mol/l$

$C_A(\,t=1\text{min}) = 1-0.0011 = 0.998\,mol/l$

1 Le sens de la diffusion est de A vers B

$$\phi_{molaire}(t=1min) = -D\frac{\Delta C}{\Delta x} = -D\left(\frac{C_B(\,t=1\text{ min}) - C_A(\,t=1\text{ min})}{\Delta x}\right)$$

$$\phi_{molaire}(t=1min) = -8.58\times10^{-6}\left(\frac{0.0011\ -0.998}{0.5\times10^{-1}}\right)\times10^{-3}$$

$$= 17.12\times10^{-8}mol/cm^2s$$

1. Calcul du $D_{lactose}$

$D_{Gl} = A\frac{T}{\sqrt[3]{M_{Gl}}}$, $D_{Lact} = A\frac{T}{\sqrt[3]{M_{lact}}}$

$$\frac{D_{Lact}}{D_{Gl}} = \frac{\sqrt[3]{M_{Gl}}}{\sqrt[3]{M_{lact}}}$$

$$D_{Lact} = 8.58\times10^{-6}\times\frac{\sqrt[3]{180}}{\sqrt[3]{342}} = 6.92\times10^{-6}cm^2/s$$

Exercice 5

1. Calcul du flux molaire initial

$$\phi_{molaire}(initial) = -DS\frac{\Delta C}{\Delta x} = -10^{-9} \times 3 \times \left(\frac{((0-3)/60)}{0.12 \times 10^{-3}}\right) \times 10^3 = 1.25 \times 10^{-3}\ mol/s$$

$$C(t) = C_0\ exp - \left(\frac{DS}{V_0 \Delta x}\right) t$$

2. $t = \frac{\ln\left(\frac{c(t)}{c_0}\right)}{-\left(\frac{DS}{V_0\Delta x}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{0.3}{3}\right)}{-\left(\frac{10^{-9}\times 3}{50\times 10^{-3}\times 0.12\times 10^{-3}}\right)} = 4.6 \times 10^3 s = 1.27hh$h=1h16min

3. Calcul du nombre de sacs nécessaires pour diminuer l'urémie à 0.3 g/l

Premier sac :

$$C_1^{Eq} = \frac{C_0 V_0}{V_0 + V}$$

V_0=50l 3 g/l	V=2l 0 g/l

Deuxième sac :

$$C_2^{Eq} = \frac{\left(\frac{C_0V_0}{V_0+V}\right)V_0}{V_0+V} = \frac{C_0Vo^2}{(V_0+V)^2}$$

V_0=50l $\frac{C_0V_0}{V_0+V}$	V=2l 0 g/l

Troisième sac :

$$C_3^{Eq} = \frac{\left(\frac{C_0Vo^2}{(V_0+V)^2}\right)V_0}{(V_0+V)} = \frac{C_0Vo^3}{(V_0+V)^3}$$

V_0=50l $\frac{C_0Vo^2}{(V_0+V)^2}$	V=2l 0 g/l

$$C_n^{Eq} = \frac{C_0Vo^n}{(V_0+V)^n}$$

V_0=50l $\frac{C_0Vo^n}{(V_0+V)^n}$	V=2l 0 g/l

$$n = \frac{\ln\left(\frac{c_n}{c_0}\right)}{\ln\left(\frac{V_0}{V_0+V}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{0.3}{3}\right)}{\ln\left(\frac{50}{50+2}\right)} = 58\ sacs$$