Série : Opérateurs sur les espaces de Banach

Exercice 1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, soit (u_n) une suite bornée de $H_0^1(\Omega)$, montrer qu'il existe une sous-suite (noté $(u_{nk}) = (u_n)$) telle que :*

$$\begin{array}{rcl} u_n & \rightharpoonup & u \quad \textit{dans } H_0^1(\Omega), \\ u_n & \to & u \quad \textit{dans } L^q(\Omega), \forall q \in \big[1, \dfrac{2N}{N-2}\big] \\ u_n(x) & \to & u(x) \ \textit{p.p.x dans } \Omega. \end{array}$$

Exercice 2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, un ouvert borné, on définit les fonctionnelles :*

$$\begin{array}{rcl} I : L^2(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & I(u) = \displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx = \|u\|_{L^2}^2, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} J : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & J(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|_{H_0^1}^2, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} K : H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & K(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} L : H^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & L(u) = \displaystyle\int_\Omega u^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx. \end{array}$$

1. *Vérifier que I, J, K et L sont des fonctionnelles différentiables en tout point.*
2. *Calculer $I'(u), J'(u), L'(u)$.*

Exercice 3 *Soit $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., N\}$, on définit $N \times N$-matrice : $A(x) = (a_{ij})$, on prend $q \in L^\infty(\Omega)$ et on définit l'application $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par :*

$$a(u, v) = \int_\Omega (A(x)\nabla u(x))\nabla v(x) \, dx + \int_\Omega q(x)u(x)v(x) \, dx.$$

1. *Vérifier que a est bilinéaire continue et si A est symétrique, alors a est symétrique.*

2. *On définit :*
$$J(u) = a(u,u) = \int_\Omega (A(x)\nabla u(x))\nabla u(x)\,dx + \int_\Omega q(x)u(x)^2\,dx.$$
Montrer que J est différentiable et :
$$\langle J'(u), v\rangle = 2a(u,v).$$

Exercice 4 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, un ouvert borné de frontière régulière. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, supposons qu'il existe $a, b > 0$ tels que :*
$$|f(t)| \leq a + b|t|^{2^*-1},$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$, rappelons que $2^* = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant critique pour l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$. On définit :
$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds.$$
On veut étudier les propriétés de différentiabilité des fonctionnelles intégrales comme $\int_\Omega = \int_\Omega F(u)\,dx$; on considère :
$$J(u) = \int_\Omega F(u)\,dx.$$

1. (a) *Vérifier que :*
$$\lim_{t\to 0} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = f(u)v.$$
   (b) *Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, en utilisant le théorème des accroissements finis montrer qu'il existe $c > 0$; tel que*
$$\left|\frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\right| \leq c(|v| + |u|^{2^*-1}v + |v|^{2^*}).$$
   (c) *Vérifier que $|v| + |u|^{2^*-1}v + |v|^{2^*} \in L^1(\Omega)$.*
   (d) *Déduire que $\lim_{t\to 0} \int_\Omega \frac{F(u+tv) - F(u)}{t}\,dx = \int_\Omega f(u)v\,dx$, et par suite J est Gâteaux différentiable.*
2. *Montrer que l'application $J'_G : H^1(\Omega) \to \big(H^1(\Omega)\big)'$ est continu ; pour cela :*
   (a) *Prendre une suite $(u_n) \subset H^1(\Omega)$ converge fortement vers $u \in H^1(\Omega)$. Vérifier qu'il existe une sous-suite notée (u_n) telle que :*
   – *$u_n \to u$ dans $L^{2^*}(\Omega)$.*
   – *$u_n(x) \to u(x)$ p.p. x dans Ω.*
   – *Il existe $w \in L^{2^*}(\Omega)$ telle que $|u_n(x)| \leq w(x)$ p.p. dans Ω et pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (b) *Déduire que $\lim_{n\to+\infty} |f(u_n(x)) - f(u(x))| = 0$ p.p. $x \in \Omega$, puis montrer que :*
$$|f(u_n) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}} \leq C(1 + |w|^{2^*} + |u|^{2^*}) \in L^1(\Omega).$$
3. *Montrer que l'on a :*
$$\big|\langle J'_G(u_n) - J'_G(u), v\rangle\big| \leq \left(\int_\Omega |f(u_n) - f(u)|^{\frac{2^*}{2^*-1}}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_\Omega |v|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}}.$$
4. *Verifier que $\|J'_G(u_n) - J'_G(u)\|_{(H^1(\Omega))'} \to 0$. Que peut-on déduire ?.*