حلول السلسلة رقم 03 (تقارب التوزيعات الاحتمالية)

التمرين الأول:

تلتزم الشركة العامة للإلكترونيات بإصلاح الأجهزة خلال مدة ستة اشهر من بيعها، فإذا علمنا أن احتمال تعطل الأجهزة بعد بيعها هو 0.02 فما احتمال أن من بين 300 جهاز تم بيعه ستلتزم الشركة بإصلاح على الأقل أربعة منها؟

الحل:

من شروط هذه المسالة نجد أن لدينا 300 جهاز مباع، أي وكأن لدينا n=300 تكرارا مستقلا، واحتمال تعطل الجهاز خلال لحظة معينة (احتمال النجاح) ثابت ويساوي p=0.01، اي إذا رمزنا لعدد الأجهزة المعطلة خلال اللحظة t بالرمز x، فإن هذا المتغير يخضع لتوزيع ذي الحدين.

$$P(X=x)=\left(C_{300}^{x}\right)0.01^{x}0.99^{300-x} \quad x=1,2,\ldots..300$$

$$P(X\geq 4)=1-\left[\left(C_{300}^{x}\right)0.01^{x}0.99^{300-x}\right]$$

حساب $P(X\geq 4)$ وفق المعادلة السابقة يحتاج عمليات حسابية طويلة، وبالتالي يفضل التفكير في توزيع بواسون.

- لدينا $n=300\geq 30$
- ولدينا $P=0.01\leq 0.01$
- و في نفس الوقت $n*p=300*0.01=3<5$

إذن نستخدم توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ذي الحدين، حيث أن: λ=np=300*0.01=3

$$P_x t=P(X=x)=\frac{3^x e^{-3}}{x\,!}$$

$$P_3 t=P(X\geq 4)=\sum_{x=4}^{\infty}\frac{3^x e^{-3}}{x\,!}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{3^x e^{-3}}{x\,!}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - \left[\frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!}\right]$$

$$P(X \geq 4) = 1 - [0.049 + 0.149 + 0.224 + 0.224]$$

$$P(X \geq 4) = 0.354$$

- إذن احتمال أن من بين 300 جهاز تم بيعه ستلتزم الشركة بإصلاح على الأقل أربعة منها هو 0,354

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على مائة آلة حلاقة، وقد ثبت من خلال تجارب العملاء أن في كل صندوق ما نسبته 2% من الآلة يكون بها خلل، فإذا سحبنا ثلاثة آلات بدون إعادة، وكان المتغير العشوائي x يمثل عدد الآلات العاطلة في العينة المختارة.

- أوجد الاحتمالات التالية:

1) $P(X = 2)$ 2) $P(X = 0)$ 3) $P(0 < X \leq 2)$

الحل:

لدينا   n=3   N-N1=98   N1=2   N=100

بما أن التجارب المتكررة غير مستقلة، والسحب بدون ارجاع، أي أن احتمال أن تكون الآلة معطلة يتغير كلما سحبنا جهازا من الصندوق، فإن المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد آلات الحلاقة العاطلة يتبع التوزيع فوق الهندسي، أي دالة التوزيع الاحتمالي هي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{x}{3}\binom{3-x}{98}}{\binom{3}{100}} & x = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{القيم الأخرى} \end{cases}$$

وبما أن N كبيرة جدا مقارنة مع n فإنه لا يوجد فرق بين المعاينة بإعادة أو بدون إعادة، وفي الواقع إذا كانت $N \to \infty, N_1 \to \infty$ بحيث يكون $\frac{N_1}{N} \to P$ و لدينا n صغيرة مقارنة مع N وعليه يصبح:

$$\frac{\binom{x}{N_1}\binom{n-x}{N-N_1}}{\binom{n}{N}} \to \binom{x}{n} P^x (1-P)^{n-x}$$

$$P(X=x)=\binom{x}{n}P^x(1-P)^{n-x}$$

- حساب الاحتمال $P(X=2)$

$$P(X=2)=\binom{2}{3}0.02^2(0.98)^1=\frac{3!}{2!\,(3-2)!}0.02^2 0.98^1=0.0011$$

- حساب الاحتمال $P(X=0)$

$$P(X=0)=\binom{0}{3}0.02^0(0.98)^3=\frac{3!}{0!\,(3-0)!}0.02^0 0.98^3=0.9411$$

- حساب الاحتمال $P(0<X\leq 2)$

$$P(0\leq X\leq 2)=P(x=1)+P(x=2)$$

نحسب الاحتمال $P(x=1)$

$$P(X=1)=\binom{1}{3}0.02^1(0.98)^2=\frac{3!}{1!\,(3-1)!}0.02^1 0.98^2=0.0576$$

إذن يصبح لدينا:

$$P(0\leq X\leq 2)=0.0576+0.0011=0.0587$$

التمرين الثالث:

نرمي قطعة نرد متوازنة 100 مرة ونهتم بظهور الرقم 4، احسب الاحتمالات التالية:

- ظهور الرقم 4، 18 مرة على الأكثر.
- ظهور الرقم 4، 10 مرة على الاقل.
- ظهور الرقم 4، بين 10 و18 مرة.

الحل:

بما ان المتغير العشوائي x يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بمعلمتين n=100, p=0.1667، فإن دالة الكثافة الاحتمالية تكون:

$$P(X=x)=\begin{cases}\binom{x}{100}0.1667^x 0.8333^{100-x} & x=0,1,\ldots.100\\ 0 & O/w\end{cases}$$

- احتمال ظهور الرقم 4، 18 مرة على الأكثر.

$$P(X\leq 18)=P(X=0)+P(X=1)+\cdots P(X=18)$$

وهذه العملية كبيرة جدا وتتطلب الكثير من الوقت، لذا نقوم باستخدام تقريب توزيع ذو الحدين إلى التوزيع الطبيعي وحساب الاحتمالات بواسطته.

☜ الشرط النظري:

- إذا كان n (حجم العينة) كبير جدا
- إذا كان p يقارب 0,5 أي ظاهرة عادية (ليست نادرة).

☜ الشرط التطبيقي:

- $np \geq 5$

باستخدام التقريب للتوزيع الطبيعي نجد أن:

$$\mu = np = 100 * 0.1667 = 16.67 \qquad \sigma^2 = npq = 100 * 0.1667 * 0.8333 = 13.89$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{13.89} = 3.72$$

حساب الاحتمال $P(X \leq 18)$ باستخدام التقريب نجد أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي هي المساحة تحت النقطة $x = 18.5$

$$\begin{aligned} &P(X \leq 18) = P(x \leq 18.5) = P(z \leq 0.49) \\ &= \varphi(0.49) \\ &= 0.6879 \end{aligned}$$

حساب الاحتمال $P(X \geq 10)$ باستخدام التقريب نجد أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي هي المساحة فوق النقطة $x = 10.5$

$$\begin{aligned} &P(X \geq 10) = 1 - P(x \prec 10) = 1 - P(x \prec 9.5) = 1 - P(z \prec -1.92) = 1 - 0.0274 \\ &= \varphi(1.92) \\ &= 0.9726 \end{aligned}$$

حساب الاحتمال $P(10 \leq X \leq 18)$ باستخدام التقريب نجد أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي هي المساحة بين النقطتين $x_1 = 10.5, \quad x_2 = 18.5$

$$\begin{aligned} &P(10 \leq X \leq 18) = P(10.5 \leq x \leq 18.5) = P(-1.66 \leq z \leq 0.49) \\ &= \varphi(0.49) - \varphi(-1.66) \\ &= 0.6879 - 0.0485 \\ &= 0.6394 \end{aligned}$$

التمرين الرابع:

يستقبل مركز بريد المدينة 10 مواطنين في الساعة وذلك حسب إحصائيات مصالح البريد، والمطلوب:

- احسب باستخدام توزيع بواسون احتمال أن أربع أشخاص على الاكثر يقصدون مركز البريد في ساعة ما؟
- احسب باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، احتمال أن أربع أشخاص على الاكثر يقصدون مركز البريد في ساعة ما؟

الحل:

نفترض أن x يمثل عدد الأشخاص الذين يقصدون مركز البريد، x موزع توزيع بواسون، أي أن

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x\,!} \qquad \lambda=10$$

- حساب باستخدام توزيع بواسون احتمال أن أربع أشخاص على الاكثر يقصدون مركز البريد في ساعة ما

$$P(X\le 4)=[P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)]$$

$$P(X\le 4)=\left[\frac{10^0e^{-10}}{0\,!}+\frac{10^1e^{-10}}{1\,!}+\frac{10^2e^{-10}}{2\,!}+\frac{10^3e^{-10}}{3\,!}+\frac{10^4e^{-10}}{4\,!}\right]$$

$$P(X\le 4)=[0.00005+0.0005+0.0025+0.0083+0.0208]$$

$$P(X\le 4)=0.03215$$

- حساب باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، احتمال أن أربع أشخاص على الاكثر يقصدون مركز البريد في ساعة ما:

$$\mu=\lambda=10\,; \qquad \sigma=\sqrt{\lambda}=\sqrt{10}=3.1622$$

- حساب الاحتمال $P(X\le 4)$ باستخدام التقريب نجد أن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي هي المساحة تحت النقطة $x=4.5$

$$P(X\le 4)=P\left(x+0.5\le 4.5\right)=P(z\le -1.73)$$
$$=\varphi(-1.73)$$
$$=0.0418$$

وكلما زادت قيمة λ ستقترب قيمة الاحتمال من تلك المحسوبة بواسطة التوزيع الطبيعي.

التمرين الخامس:

يدرس بالسنة الثانية ليسانس لشعبة العلوم الاقتصادية، 200 طالب مقسم بين 120 إناث 80 ذكور، يريد الطلبة انتخاب ممثلين عنهم في اللجنة البيداغوجية للقسم، بحيث تتكون هذه اللجنة من 12 طالب.

- ما هو احتمال أن تحتوي اللجنة على طالبتين على الأقل؟
- ما هو احتمال أن تحتوي اللجنة على ثمان طالبات على الأكثر؟

الحل:

يمثل المتغير العشوائي x عدد الطالبات في اللجنة ، N عدد طلبة القسم الاجمالي، و N1 عدد الطالبات في القسم، إذن المتغير x يتبع التوزيع الاحتمالي فوق الهندسي، ودالته الاحتمالية على الشكل:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{x}{N_1}\binom{n-x}{N-N_1}}{\binom{n}{N}} & x=0,1,2,3,4,5\\ 0 & \text{القيم الأخرى}\end{cases}$$

ولدينا: N1=120, N=200, n=12,

إذن لحساب الاحتمالات المتعلقة بـ x نستعمل العلاقة:

$$P(X=x)=\frac{\binom{x}{120}\binom{12-x}{80}}{\binom{12}{200}}\qquad x=0,1,2,3,\dots\dots.12$$

1- احتمال أن تحتوي اللجنة على طالبتين على الأقل:

لصعوبة اجراء الحسابات المتعلقة بهذا الاحتمال، فإننا نقوم بتقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الطبيعي، عن طريق العلاقة التالية:

$$H.G(n;N;N-N_1)\sim N\left(\mu=n\frac{N_1}{N};\ \sigma=\sqrt{n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(1-\frac{N_1}{N}\right)}\right)$$

$$\mu=n\frac{N_1}{N}=12\frac{120}{200}=7.2$$

$$\sigma=\sqrt{n\left(\frac{N_1}{N}\right)\left(1-\frac{N_1}{N}\right)}=\sqrt{12\left(\frac{120}{200}\right)\left(1-\frac{120}{200}\right)}=1.7$$

$$P(X\geq 2)=1-\varphi\left(\frac{2-0,5-7,2}{1,7}\right)$$

$$P(X\geq 2)=1-\varphi(-3.35)=1-0.0004=0.9996$$

2- احتمال أن تحتوي اللجنة على ثمان طالبات على الأكثر:

$$P(X\leq 8)=\varphi\left(\frac{8+0,5-7,2}{1,7}\right)$$

$$P(X\leq 8)=\varphi(0.76)=0.7764$$