

# Conception et fabrication assistée par ordinateur *CFAO*

Master construction mécanique

**Par Dr. Slamani Mohamed**

# Représentation paramétrique

- Forme paramétrique générale d'une courbe en 3D:

$$\vec{P}(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)] \quad , u \in [u_0, u_1]$$

où  $x(u)$ ,  $y(u)$  et  $z(u)$  sont les composants de chaque point de la courbe évaluée en  $u$  dans l'intervalle  $[u_0, u_1]$ .

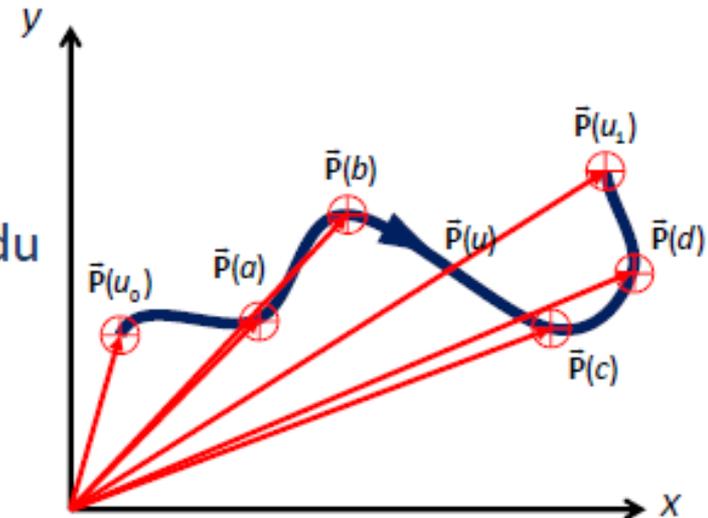
- Forme réduite en 2D:

$$\vec{P}(u) = [x(u) \quad y(u)] \quad , u \in [u_0, u_1]$$

- Exemple:

$a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des valeurs discrètes du paramètre  $u$  telles que

$$u_0 < a < b < c < d < u_1.$$

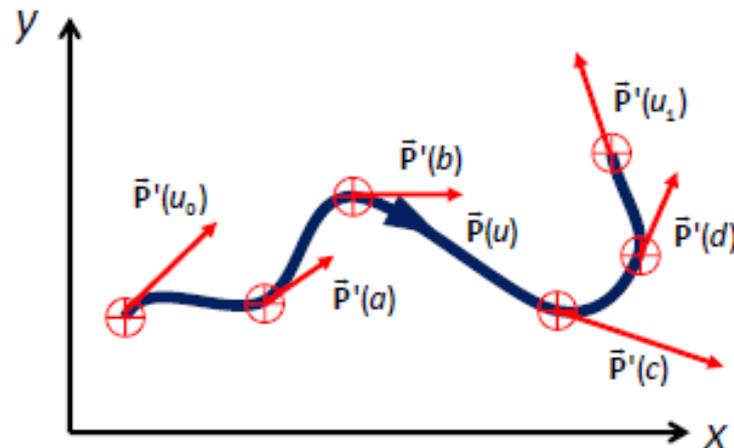


# Représentation paramétrique

- La dérivé première en  $u$  d'une courbe paramétrique donne l'ensemble des vecteurs tangents:

$$\bar{\mathbf{P}}'(u) = \begin{bmatrix} \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \end{bmatrix} = [x'(u) \quad y'(u) \quad z'(u)] \quad , u \in [u_0, u_1]$$

où  $x'(u)$ ,  $y'(u)$  et  $z'(u)$  sont les composants de chaque vecteurs tangents de la courbe évaluée en  $u$  dans l'intervalle  $[u_0, u_1]$ .



# Courbes polynomiales

- Les courbes analytiques sont insuffisantes pour répondre aux exigences de conception géométrique des pièces mécaniques:
  - Carrosseries de voitures,
  - Coques de navire,
  - Fuselages et ailes d'aéronefs,
  - Pales d'hélices,
  - Semelles de chaussures,
  - Etc.
- On a recours aux courbes complexes ou « synthétiques » lorsqu'une courbe est d'abord représentée par une collection de points de contrôle.
- Objectif: construire une courbe lisse qui interpole ou approxime un ensemble ordonné de points de contrôle.

# Courbes polynomiales

- Forme générale d'une équation paramétrique d'une courbe polynomiale de degré n :

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^n \vec{a}_i u^i = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 u + \vec{a}_2 u^2 + \dots + \vec{a}_n u^n \quad \text{avec } u \in [u_0, u_1]$$

- $\vec{a}_i$  : vecteurs de dimension 3 (pour courbe dans l'espace de dimension 3)
- $1, u, u^2, u^n$  : fonctions de base,  $u \in [0,1]$  pour limiter la courbe en CAO
- $a_1 u, a_2 u^2, a_n u^n$  : monômes (polynôme à 1 seul terme)
- Degré du polynôme : degré du monôme le plus élevé
- Une courbe représentée par un polynôme de degré n passe exactement par n+1 points

# Courbes polynomiales

- Exemple:

L'interpolation de 2 points donne une droite, représentée par un polynôme de degré 1;

$$\vec{P}(u) = \sum_{i=0}^1 \vec{a}_i u^i \quad \text{avec } u \in [0,1]$$

$$= \vec{a}_0 + \vec{a}_1 u$$

$$= \vec{P}_0 + (\vec{P}_1 - \vec{P}_0)u$$

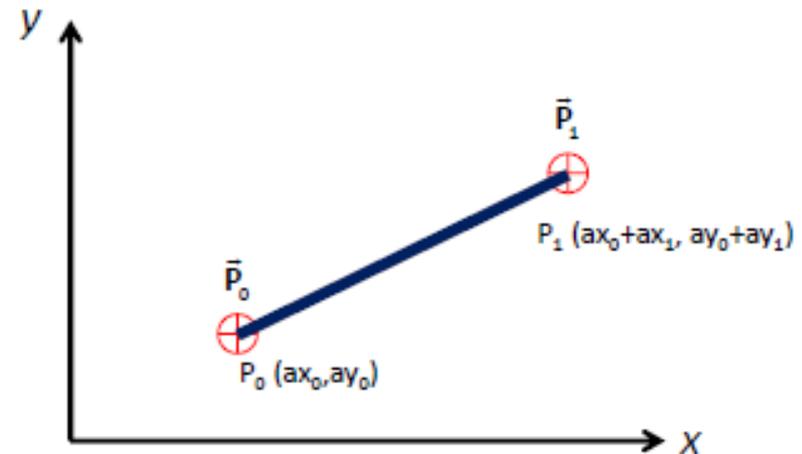
avec :

$$\vec{a}_0 = (ax_0, ay_0)$$

$$\vec{a}_1 = (ax_1, ay_1)$$

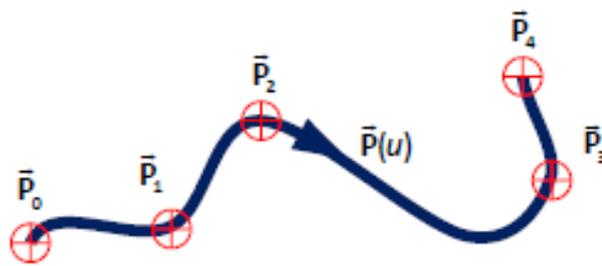
$$P(0) = P_0 = (ax_0, ay_0)$$

$$P(1) = P_1 = (ax_0 + ax_1, ay_0 + ay_1)$$

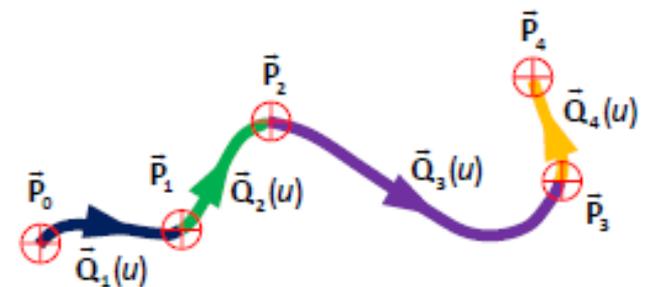


# Courbes polynomiales

- Pour construire une courbe à l'aide d'un ensemble ordonné de  $N$  points de contrôle, on peut...
  - Construire une seule courbe utilisant tous les points; le degré de la courbe est donc dépendant du nombre de points.
  - Construire plusieurs segments consécutifs de courbes de degré imposé  $n$  utilisant chacun un sous-ensemble de  $n + 1$  points de contrôle.



Courbe unique



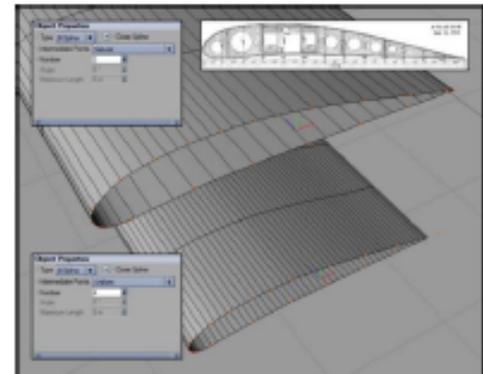
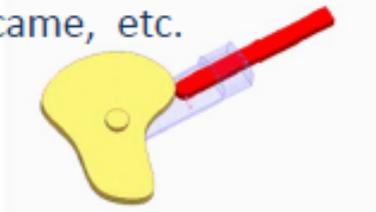
Courbe par segments

# Courbes polynomiales

- Les courbes (polynômes) de degré élevé ne sont habituellement pas utilisés en CAO, car:
  - Elles ont tendance à osciller de manière indésirable au voisinage des points de contrôle;
  - Elles accaparent énormément de ressources de calcul d'un ordinateur;
  - Leurs représentations internes n'est pas concise (occupent inutilement beaucoup d'espace mémoire).
- En CAO, les courbes sont généralement:
  - Définies par morceaux;
  - Construites à l'aide de segments des courbes polynomiales de degré 3;
  - Décrites sous forme paramétrique.

# Courbes polynomiales

- Les courbes paramétriques par morceaux de degré 3
  - Avantages :
    - Permettent la représentation de courbes dans l'espace de dimension 3;
    - 2 courbes de degré 3 peuvent être raccordées en respectant une continuité du 2<sup>ième</sup> ordre;
    - Les courbes ainsi raccordées semblent formées une seule courbe
- Continuité des courbes par morceaux:
  - Différentes exigences de continuité des profils peuvent être spécifiées dans la conception des pièces mécaniques:
    - Aérodynamisme d'un fuselage ou d'une aile;
    - Fluidité de mouvement d'un galet parcourant une came, etc.

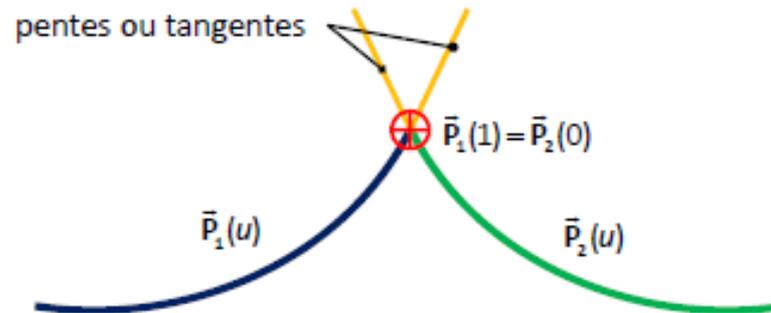


# Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - L'ordre de continuité prend de l'importance lorsque les courbes complexes sont définies par segments;
  - Le plus petit ordre de continuité à un point de jonctions de deux segments définit l'ordre de continuité de la courbe résultante;
- Continuité géométrique / continuité paramétrique:
  - Continuité géométrique ( $G_x$ ), continuité ou « aspect lisse » de la courbe résultante;
  - Continuité paramétrique ( $C_x$ ), continuité dans le traçage de la courbe (aspect dynamique, analogie avec le mouvement d'une particule se déplaçant le long des segments de courbes.

# Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - G0: Continuité géométrique d'ordre 0
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue G0 si celle-ci est ininterrompue au point de jonction;
    - Appelée aussi continuité de position;
    - Correspond à une courbe tracée sans lever le crayon...



- Soit  $P_1(u)$  et  $P_2(u)$  définis sur  $u \in [0,1]$ ;  
 $P_1(1)$  étant le point d'arrivée de  $P_1$   
 $P_2(0)$  étant le point de départ de  $P_2$   
 $P_1$  et  $P_2$  sont continues G0  
 si  $P_1(1) = P_2(0)$

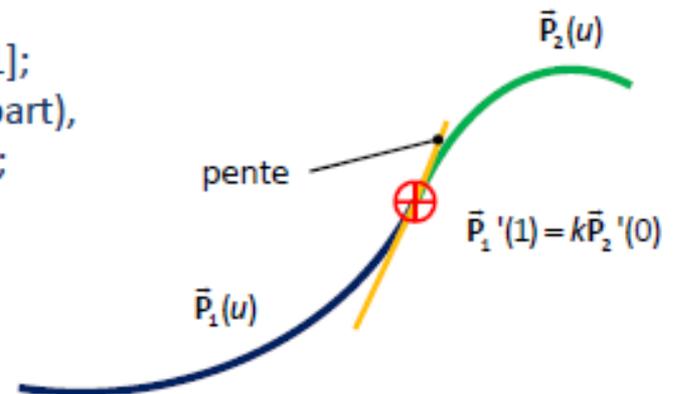
# Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - G1: Continuité géométrique d'ordre 1
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue G1 si la pente au point de jonction est la même pour les deux segments;
    - Appelée aussi continuité de pente ou tangence;
    - On fait correspondre la direction des vecteurs tangents.

- Soit  $P_1(u)$  et  $P_2(u)$  définis sur  $u \in [0,1]$ ;  
 $P_1'(1)$  étant la tangente en  $P_1(1)$  (départ),  
 $P_2'(0)$  étant la tangente en  $P_2(0)$  (fin);

$P_1$  et  $P_2$  sont continues G1 si

$$\bar{P}_1'(1) = k\bar{P}_2'(0) \quad , \quad k > 0.$$



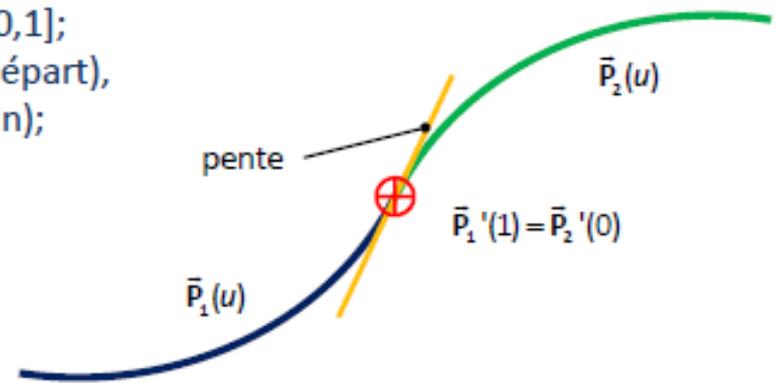
# Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - C1: Continuité paramétrique d'ordre 1
    - G1 correspond à la continuité de la direction du vecteur tangent;
    - C1 implique G1 ET la continuité de la grandeur du vecteur tangent;
    - Correspond au tracé d'une courbe lisse sans changement brusque de vitesse;
    - On fait correspondre les dérivées premières au point de jonction.

- Soit  $P_1(u)$  et  $P_2(u)$  définis sur  $u \in [0,1]$ ;  
 $P_1'(1)$  étant la tangente en  $P_1(1)$  (départ),  
 $P_2'(0)$  étant la tangente en  $P_2(0)$  (fin);

$P_1$  et  $P_2$  sont continues C1 si

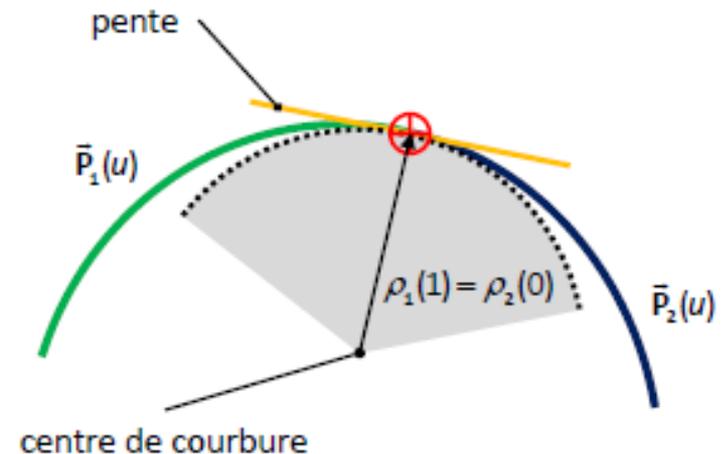
$$\vec{P}_1'(1) = \vec{P}_2'(0).$$



# Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - G2: Continuité géométrique d'ordre 2
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue G2 si le centre de courbure au point de jonction est le même pour les deux segments;
    - Appelée aussi continuité de courbure;
    - Pour  $P(u) = [ x(u) \ y(u) ]$ , le rayon de courbure  $\rho(u)$  est défini par l'équation:

$$\rho(u) = \frac{(x'(u)^2 + y'(u)^2)^{3/2}}{x'(u)y''(u) - y'(u)x''(u)}$$



# Courbes polynomiales

- Continuité des courbes par morceaux (suite):
  - C2: Continuité paramétrique d'ordre 2
    - Deux segments de courbes forment une courbe continue C2 si leurs dérivées secondes respectives au point de jonction sont égales;
    - Correspond au déplacement d'une particule dont la vitesse et l'accélération (tangentielle et normale) varient graduellement.
  - En conclusion...
    - En modélisation, on s'intéresse surtout à la continuité géométrique.
    - En analyse, la continuité paramétrique peut être une condition nécessaire aux calculs basés sur la géométrie.

# Courbes polynomiales cubiques

- Exemple simple d'équation paramétrique de degré 3:

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1u + c_1u^2 + d_1u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2u + c_2u^2 + d_2u^3 \\ z(u) = a_3 + b_3u + c_3u^2 + d_3u^3 \end{cases} \quad (\text{représentation algébrique})$$

$$\vec{P}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3 \quad (\text{représentation vectorielle})$$

- Courbe polynomiale cubique
- 3 équations algébriques,  $u \in [0,1]$
- 12 inconnus  $a_i, b_i, c_i, d_i$  avec  $i = 1, 2, 3$
- Fixer ou modifier les valeurs des coefficients algébriques  $a_i, b_i, c_i, d_i$  ne permet pas de contrôler facilement la forme de la courbe
- Contraintes géométriques :
  - Degré 3 donc cette courbe passe par 4 points correspondant à 4 valeurs de  $u$
  - Ou 2 points et 2 tangentes en ces points

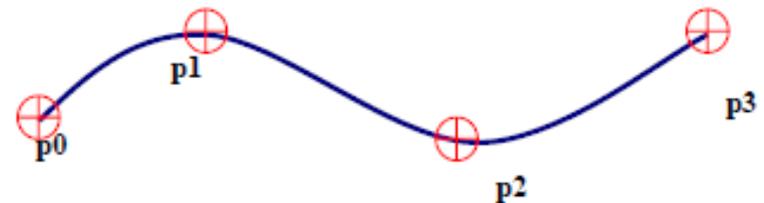
# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (en 2D)

- Soit les équations du polynôme :

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1u + c_1u^2 + d_1u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2u + c_2u^2 + d_2u^3 \end{cases}$$

- L'interpolation de Lagrange utilise quatre points ( $p_0$  à  $p_3$ ).
- On obtient donc un système de 8 équations correspondant au coordonnées  $x, y$  de chaque point (12 équations en 3D pour  $x, y, z$ ).
- La résolution fournit les valeurs des paramètres  $a_i, b_i, c_i$  et  $d_i$ .

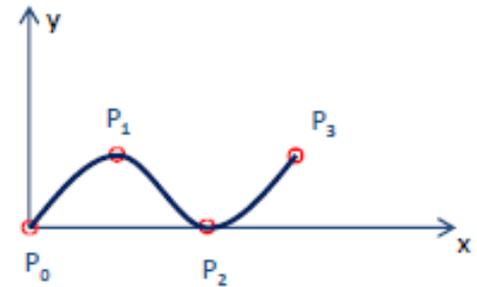


# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (suite)
  - Exemple en 2D: Expression matricielle

$$\bar{\mathbf{P}}(u) = [x(u) \quad y(u)]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \\ c_x & c_y \\ d_x & d_y \end{bmatrix}$$



- Résolution matricielle

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}(u_0) \\ \bar{\mathbf{P}}(u_1) \\ \bar{\mathbf{P}}(u_2) \\ \bar{\mathbf{P}}(u_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{b}} \\ \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{d}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}(u_0) \\ \bar{\mathbf{P}}(u_1) \\ \bar{\mathbf{P}}(u_2) \\ \bar{\mathbf{P}}(u_3) \end{bmatrix}$$

# Déterminant d'une matrice

## Calcul du déterminant pour une matrice $2 \times 2$

Considérons la matrice  $A$  de dimension  $2 \times 2$  :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice  $A$  est définie par la relation

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

### ***Exemple***

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de  $A$  est ainsi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

# Définition d'un mineur

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur  $M_{12}$  est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1<sup>ère</sup> rangée et la 2<sup>e</sup> colonne de  $A$ , c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur  $M_{22}$  est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2<sup>e</sup> rangée et la 2<sup>e</sup> colonne de  $A$ , c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

# Définition d'un cofacteur

Le cofacteur,  $C_{ij}$ , d'une matrice  $A$  est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

# Définition d'un cofacteur

Considérons à nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà montré que le mineur  $M_{12} = -9$ . Ainsi, le cofacteur correspondant,  $C_{12}$ , est

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -1 \cdot (-9) = 9$$

Il s'avère que le mineur,  $M_{12}$ , et le cofacteur,  $C_{12}$ , sont de signes différents.

Le mineur  $M_{22} = -26$ . Son cofacteur correspondant,  $C_{22}$ , est

$$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = 1 \cdot (-26) = -26$$

Cette fois, le mineur,  $M_{22}$ , et le cofacteur,  $C_{22}$ , sont identiques.

Évaluer le déterminant d'une matrice  $3 \times 3$  sera maintenant possible. Nous procéderons en réduisant celui-ci en une série de déterminants  $2 \times 2$ , pour lesquels le calcul est nettement plus facile. Ce processus est appelé **une expansion par cofacteurs**.

# Expansion par cofacteurs - méthode de calcul des déterminants

Soit  $A$  une matrice carrée et  $C_{ij}$  ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de  $A$  (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de  $A$  contenant le plus grand nombre de zéros)...
- Multiplier chacun des éléments  $a_{ij}$  de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur,  $C_{ij}$ , correspondant...
- Faire la somme de ces résultats.

# Calcul du déterminant pour une matrice $3 \times 3$

Pour une matrice  $3 \times 3$ , cela voudrait dire qu'en choisissant de faire une expansion le long de la première rangée, le déterminant serait

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Si l'on avait choisi de faire une expansion le long de la deuxième colonne, alors il faudrait calculer

$$\det A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

Quoique le choix de rangée ou de colonne puisse différer, le résultat du déterminant sera le même quel que soit ce choix. Vérifions par un exemple.

### Exemple

Quel est le déterminant de la matrice  $A$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

### Solution

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de  $A$ ... Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants... Les éléments de la première rangée sont  $a_{11} = 2$ ,  $a_{12} = 1$ , et  $a_{13} = 3$  que l'on multiplie avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  et  $C_{13}$  qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0 \cdot (-2) - 2 \cdot 0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$\det A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

$$\det A = 2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 0 = 6$$

Vérifions si une expansion le long de la deuxième colonne appuierait le résultat précédent. Notez que le choix de la deuxième colonne est nettement la plus efficace puisque le déterminant sera obtenu du calcul

$$\det A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

et deux des trois éléments de la 2e colonne sont nuls. En effet,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{22} = 0$ , et  $a_{32} = 0$ . Il est ainsi inutile de calculer les cofacteurs  $C_{22}$  et  $C_{32}$ . Pour sa part, le cofacteur correspondant à  $a_{12}$  est

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

Le déterminant de  $A$  est donc

$$\det A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} = 1 \times 6 + 0 \times C_{22} + 0 \times C_{32} = 6$$

ce qui correspond effectivement à la réponse obtenue par une expansion le long de la première rangée.

# Déterminants de matrices carrées de dimensions 4x4 et plus

Les méthodes présentées dans le cas des matrices  $3 \times 3$  demeurent valides pour toutes les dimensions supérieures. Il s'agit à nouveau de suivre les étapes d'une expansion par cofacteurs :

Soit  $A$  une matrice carrée et  $C_{ij}$  ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de  $A$  (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de  $A$  contenant le plus grand nombre de zéros)...
- Multiplier chacun des éléments  $a_{ij}$  de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur,  $C_{ij}$ , correspondant...
- Faire la somme de ces résultats.

Il faut toutefois noter une distinction. Le cofacteur associé à l'élément  $a_{ij}$  d'une matrice  $4 \times 4$  est le déterminant d'une matrice  $3 \times 3$ , puisqu'il est obtenu en éliminant une rangée (la  $i^{\text{e}}$ ) et une colonne (la  $j^{\text{e}}$ ) de  $A$ .

## Exemple

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il devient essentiel, pour réduire le nombre de calculs, de choisir la rangée ou la colonne qui contient le plus grand nombre de zéros, en l'occurrence, la 4<sup>e</sup> colonne. Nous procéderons donc à une expansion par cofacteurs le long de la 4<sup>e</sup> colonne ce qui veut dire que

$$\det A = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

Comme  $a_{14}$  et  $a_{44}$  sont nuls, il serait inutile de chercher à trouver  $C_{14}$  et  $C_{44}$ . Pour leur part, les cofacteurs  $C_{24}$  et  $C_{34}$  seront nécessaires...

$$C_{24} = (-1)^{2+4}M_{24} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_{34} = (-1)^{3+4}M_{34} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Nous vous laissons vérifier que  $C_{24} = 18$  et  $C_{34} = -2$ . Par conséquent, le déterminant de  $A$  est

$$\det A = a_{14}C_{14} + a_{24}C_{24} + a_{34}C_{34} + a_{44}C_{44}$$

$$\det A = 0 \times C_{14} + 1 \times 18 + 1 \times (-2) + 0 \times C_{44} = 16$$

# Déterminants de matrices carrées de dimensions 3x3

Rappel.  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$  Définition.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{suyvant} \\ \text{la 1}^{\text{e}} \text{ col.}}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-d) \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

ou bien (on obtient le même résultat)

$$\underset{\substack{\text{suyvant} \\ \text{la 1}^{\text{e}} \text{ ligne}}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-b) \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

# Matrice inverse

**Théorème.** Soit  $A$  une **matrice carrée**. Il suffit de vérifier si  $\det A = 0$  ou pas pour répondre aux question suivantes :

|  | $\det A \neq 0$ | $\det A = 0$ |
|--|-----------------|--------------|
| Le système $A\vec{x} = \vec{b}$ admet-il une unique sol. ? | Oui             | Non          |
| Est-ce que la matrice $A$ est inversible ?                 | Oui             | Non          |

# Matrice inverse

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}, \text{ où}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc. , et } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A), \text{ si } \det A \neq 0.$$

Exemple.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{Com}(A) =$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{pmatrix}, \text{ où}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \text{ etc. , et } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A), \text{ si } \det A \neq 0.$$

$$\text{Exemple. } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{Com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \det A = 1,$$

$$\text{et } A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

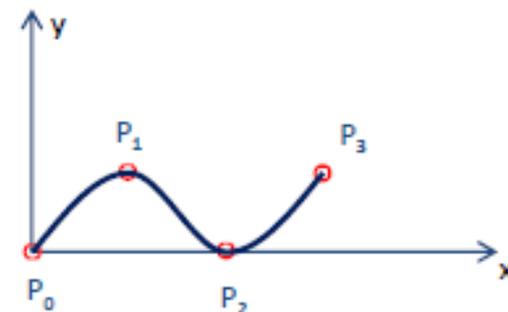
Voici les 4 étapes pour calculer  $A^{-1}$  :

- Calculer les 'mineurs'  $M_{ij}$
- rajouter les signes (en alternant) pour former  $\text{Com}(A)$
- transposer la comatrice
- diviser par  $\det A$ .

# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (suite)
  - Exemple : Déterminer l'équation polynômiale cubique de la courbe passant par les 4 points suivants:

- |                 |                         |
|-----------------|-------------------------|
| ■ $u_0 = 0;$    | $P_0 = P(u_0) = (0, 0)$ |
| ■ $u_1 = 0,33;$ | $P_1 = P(u_1) = (1, 1)$ |
| ■ $u_2 = 0,66;$ | $P_2 = P(u_2) = (2, 0)$ |
| ■ $u_3 = 1;$    | $P_3 = P(u_3) = (3, 1)$ |



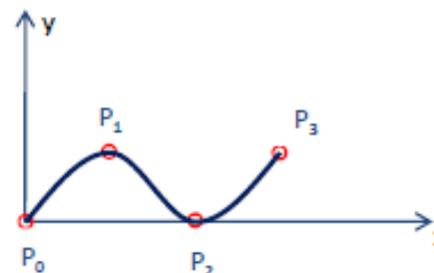
$$\bar{P}(u) = \bar{a} + \bar{b}u + \bar{c}u^2 + \bar{d}u^3$$

- Trouver  $a_x, b_x, c_x, d_x$  et  $a_y, b_y, c_y, d_y \dots$

# Courbes polynomiales cubiques

- Solution:  $u=i/(n-1)$ 
  - Déterminer l'équation polynômiale cubique de la courbe passant par les 4 points suivants:

- $u_0 = 0;$
    - $u_1 = 0,33;$
    - $u_2 = 0,66;$
    - $u_3 = 1;$
  - $P_0 = P(u_0) = (0, 0)$
  - $P_1 = P(u_1) = (1, 1)$
  - $P_2 = P(u_2) = (2, 0)$
  - $P_3 = P(u_3) = (3, 1)$



- Trouver  $a_x, b_x, c_x, d_x$  et  $a_y, b_y, c_y, d_y \dots$

- Matrice U

|  |   |      |        |          |
|--|---|------|--------|----------|
| $\begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix}$ | 1 | 0    | 0      | 0        |
|  | 1 | 0.33 | 0.1089 | 0.035937 |
|  | 1 | 0.66 | 0.4356 | 0.287496 |
|  | 1 | 1    | 1      | 1        |

- Matrice inverse  $U^{-1}$

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| 1        | 0        | 0        | 0        |
| -5.54545 | 9.045681 | -4.45633 | 0.956102 |
| 9.136823 | -22.7513 | 17.96035 | -4.34592 |
| -4.59137 | 13.70558 | -13.504  | 4.389816 |

Coef\_x Coef\_y

- Termes  $a_x, b_x, c_x, d_x$  et  $a_y, b_y, c_y, d_y$

|   |          |          |
|---|----------|----------|
| $\begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \\ \bar{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 & u_0^2 & u_0^3 \\ 1 & u_1 & u_1^2 & u_1^3 \\ 1 & u_2 & u_2^2 & u_2^3 \\ 1 & u_3 & u_3^2 & u_3^3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{P}(u_0) \\ \bar{P}(u_1) \\ \bar{P}(u_2) \\ \bar{P}(u_3) \end{bmatrix}$ | 0        | 0        |
|   | 3.00133  | 10.00178 |
|   | 0.131694 | -27.0972 |
|   | -0.13302 | 18.09539 |

# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Lagrange (fin)
  - Inconvénients principaux:
    - Le degré de la courbe est directement lié au nombre de points interpolés  
=>  $(n+1)$  points = degré  $n$ ;
    - Dans le cas d'une seule courbe, plus il y a de points, plus il y a des oscillations indésirables dans la courbe.

# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (en 2D)

- Soit les équations du polynôme :

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1u + c_1u^2 + d_1u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2u + c_2u^2 + d_2u^3 \end{cases}$$

- L'interpolation de Hermite utilise deux points  $p_0$  et  $p_1$  et leurs pentes respectives  $p_0'$  et  $p_1'$  pour déterminer les 8 inconnues (12 en 3D).



# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - La résolution passe par la réécriture des équations du polynôme sous forme vectorielle (en gras):

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u) = k_0 + k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3$$

$$\text{ou encore } \mathbf{p}(u) = \sum k_i u^i \text{ pour } i \text{ de } 0 \text{ à } 2$$

$$\text{avec } \mathbf{p} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$k_0 = (a_1, a_2, a_3)$$

$$k_1 = (b_1, b_2, b_3)$$

$$k_2 = (c_1, c_2, c_3)$$

$$k_3 = (d_1, d_2, d_3)$$

$$\bar{\mathbf{P}}(u) = \bar{a} + \bar{b}u + \bar{c}u^2 + \bar{d}u^3$$

$$\begin{cases} x(u) = a_1 + b_1 u + c_1 u^2 + d_1 u^3 \\ y(u) = a_2 + b_2 u + c_2 u^2 + d_2 u^3 \\ z(u) = a_3 + b_3 u + c_3 u^2 + d_3 u^3 \end{cases}$$

# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)

- La pente de la courbe  $\mathbf{p}$  s'obtient en dérivant l'équation  $\mathbf{p}(u)$  par rapport à  $u$ :

$$\bar{\mathbf{P}}(u) = [x(u) \quad y(u)] = \bar{\mathbf{k}}_0 + \bar{\mathbf{k}}_1 u + \bar{\mathbf{k}}_2 u^2 + \bar{\mathbf{k}}_3 u^3$$

$$\bar{P}(u) = \bar{a} + \bar{b}u + \bar{c}u^2 + \bar{d}u^3$$

$$\bar{\mathbf{P}}'(u) = [x'(u) \quad y'(u)] = \bar{\mathbf{k}}_1 + 2\bar{\mathbf{k}}_2 u + 3\bar{\mathbf{k}}_3 u^2$$

$$\bar{P}'(u) = \bar{b} + 2\bar{c}u + 3\bar{d}u^2$$

- En appliquant les conditions frontières  $p_0, p_1, p_0'$  et  $p_1'$ , on obtient un système de quatre équations et quatre inconnues:

$$\bar{\mathbf{P}}_0 = \bar{\mathbf{P}}(0) = \bar{\mathbf{k}}_0$$

$$\bar{P}_0 = \bar{P}(0) = \bar{a}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_1 = \bar{\mathbf{P}}(1) = \bar{\mathbf{k}}_0 + \bar{\mathbf{k}}_1 + \bar{\mathbf{k}}_2 + \bar{\mathbf{k}}_3$$

$$\bar{P}_1 = \bar{P}(1) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_0' = \bar{\mathbf{P}}'(0) = \bar{\mathbf{k}}_1$$

$$\bar{P}_0' = \bar{P}'(0) = \bar{b}$$

$$\bar{\mathbf{P}}_1' = \bar{\mathbf{P}}'(1) = \bar{\mathbf{k}}_1 + 2\bar{\mathbf{k}}_2 + 3\bar{\mathbf{k}}_3$$

$$\bar{P}_1' = \bar{P}'(1) = \bar{b} + 2\bar{c} + 3\bar{d}$$

# Courbes polynomiales cubiques

## ■ Interpolation de Hermite (suite)

- Ce système peut être remanié pour extraire les  $\mathbf{k}_i$ , ce qui donne:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{k}_0 = \mathbf{p}_0 & \bar{a} = \bar{P}_0 \\
 \mathbf{k}_1 = \mathbf{p}_0' & \bar{b} = \bar{P}'_0 \\
 \mathbf{k}_2 = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) - 2\mathbf{p}_0' - \mathbf{p}_1' & \bar{c} = 3\bar{P}_0 + 3\bar{P}_1 - 2\bar{P}'_0 - \bar{P}'_1 \\
 \mathbf{k}_3 = 2(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_0' + \mathbf{p}_1' & \bar{d} = 2\bar{P}_0 - 2\bar{P}_1 + \bar{P}'_0 + \bar{P}'_1
 \end{array}$$

- L'équation originale de  $\mathbf{p}$  peut finalement être réécrite :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} = \mathbf{p}(u) &= \mathbf{p}_0 (1 - 3u^2 + 2u^3) + \mathbf{p}_1 (3u^2 - 2u^3) + \mathbf{p}_0' (u - 2u^2 + u^3) + \mathbf{p}_1' (-u^2 + u^3) \\
 \bar{P}(u) &= (1 - 3u^2 + 2u^3)\bar{p}_0 + (3u^2 - 2u^3)\bar{p}_1 + (u - 2u^2 + u^3)\bar{p}'_0 + (-u^2 + u^3)\bar{p}'_1
 \end{aligned}$$

- et sous forme matricielle

$$Q(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{MH}} \underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_0' \\ p_1' \end{bmatrix}}_{\text{GH}}$$

- $M_H$  : matrice des coefficients de Hermite
- $G_H$  : Vecteur des contraintes géométrique de Hermite

# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)

- Ce système peut être remanié pour extraire les **a,b,c,d**, ce qui donne:

$$\vec{a} = \vec{P}_0$$

$$\vec{b} = \vec{P}'_0$$

$$\vec{c} = 3\vec{P}_0 + 3\vec{P}_1 - 2\vec{P}'_0 - \vec{P}'_1$$

$$\vec{d} = 2\vec{P}_0 - 2\vec{P}_1 + \vec{P}'_0 + \vec{P}'_1$$

- L'équation originale de **p** peut finalement être réécrite :

$$\vec{P}(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\vec{p}_0 + (3u^2 - 2u^3)\vec{p}_1 + (u - 2u^2 + u^3)\vec{p}'_0 + (-u^2 + u^3)\vec{p}'_1$$

- et sous forme matricielle

- $M_H$  : matrice coeff. Hermite
- $G_H$  : Vecteur contraintes géométrique de Hermite

$$\vec{P}(u) = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3]$$

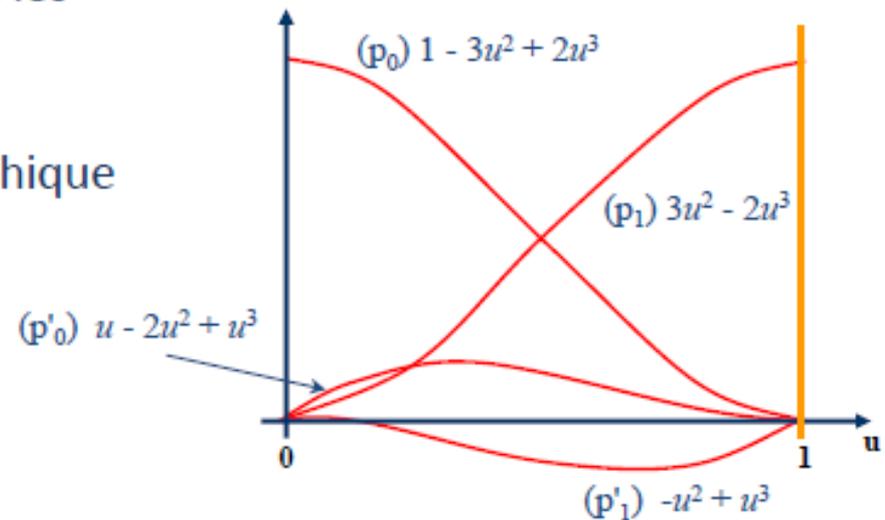
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{MH} \underbrace{\begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p'_0 \\ p'_1 \end{bmatrix}}_{GH}$$

# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - L'équation obtenue est la somme de quatre fonctions en  $u$  multipliées par les conditions frontières  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_0'$  et  $p_1'$  :

$$\bar{P}(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\bar{p}_0 + (3u^2 - 2u^3)\bar{p}_1 + (u - 2u^2 + u^3)\bar{p}'_0 + (-u^2 + u^3)\bar{p}'_1$$

- Ces fonctions s'appellent les *fonctions d'influence* (*blending functions*)
- Leur représentation graphique est illustrée ici



# Courbes polynomiales cubiques

- Interpolation de Hermite (suite)
  - Les *fonctions d'influence* ou *fonctions de base* sont un concept fondamental en CAO
  - Les *fonctions d'influence* seront appliquées à d'autres types de courbes
  - Ces fonctions représentent le long de l'intervalle de  $u$ , l'influence respective des conditions frontières :
    - Points de départ et d'arrivée
    - Pentes aux points de départ et d'arrivée
  - Exercice :

Déterminer l'équation polynômiale cubique pour les contraintes de Hermite suivantes:

$$\mathbf{p}_0 = (1,1,1) ; \mathbf{p}_1 = (2,3,0) ; \mathbf{p}'_0 = (1,1,1) ; \mathbf{p}'_1 = (1,1,0)$$

$$\vec{P}(u) = \vec{a} + \vec{b}u + \vec{c}u^2 + \vec{d}u^3$$

$$\vec{P}(u) = (1-3u^2+2u^3)\vec{p}_0 + (3u^2-2u^3)\vec{p}_1 + (u-2u^2+u^3)\vec{p}'_0 + (-u^2+u^3)\vec{p}'_1$$

# Courbes polynomiales cubiques

## ■ Interpolation de Hermite (suite)

### ■ Exercice :

Déterminer l'équation polynômiale cubique pour les contraintes de Hermite suivantes:

$$\mathbf{p}_0 = (1,1,1) ; \mathbf{p}_1 = (2,3,0) ; \mathbf{p}_0' = (1,1,1) ; \mathbf{p}_1' = (1,1,0)$$

$$\bar{P}(u) = \bar{a} + \bar{b}u + \bar{c}u^2 + \bar{d}u^3$$

$$\bar{P}(u) = (1-3u^2+2u^3)\bar{p}_0 + (3u^2-2u^3)\bar{p}_1 + (u-2u^2+u^3)\bar{p}'_0 + (-u^2+u^3)\bar{p}'_1$$

$$x(u) = (1-3u^2+2u^3) + 2(3u^2-2u^3) + (u-2u^2+u^3) + (-u^2+u^3)$$

$$x(u) = 1+u+2u^3$$

$$y(u) = (1-3u^2+2u^3) + 3(3u^2-2u^3) + (u-2u^2+u^3) + (-u^2+u^3)$$

$$y(u) = 1+u+3u^2-2u^3$$

$$z(u) = (1-3u^2+2u^3) + (u-2u^2+u^3)$$

$$z(u) = 1+u-5u^2+3u^3$$

$$\bar{P}(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)] = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 3 & -5 & \\ 2 & -2 & 3 & \end{bmatrix}$$

# Courbes polynomiales cubiques

- Exercice
  - Soit les points
    - $P1 (1,1)$
    - $P2 (6,5)$
  - et les vecteurs tangents
    - $P1' (0,4)$
    - $P2' (4,0)$
  - Déterminer les équations paramétriques de la courbe
  - Calculer les coordonnées du point à  $u = 0.5$
  - Tracer la courbe à l'aide des trois points et des deux tangentes

# Courbes polynomiales cubiques

## ■ Solution:

- Les indices sont changés de 0,1 à 1,2!
- P1 (1,1)
- P2 (6,5)
- P1' (0,4)
- P2' (4,0)

## ■ Déterminer les équations paramétriques de la courbe

$$\vec{P}(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3)\vec{p}_1 + (3u^2 - 2u^3)\vec{p}_2 + (u - 2u^2 + u^3)\vec{p}'_1 + (-u^2 + u^3)\vec{p}'_2$$

$$x(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3) + 6(3u^2 - 2u^3) + 4(-u^2 + u^3) \qquad x(u) = 1 + 11u^2 - 6u^3$$

$$y(u) = (1 - 3u^2 + 2u^3) + 5(3u^2 - 2u^3) + 4(u - 2u^2 + u^3) \qquad y(u) = 1 + 4u + 4u^2 - 4u^3$$

## ■ Calculer les coordonnées du point à $u = 0.5$

- $X=3$
- $Y=3.5$

## ■ Tracer la courbe à l'aide des trois points et des deux tangentes

# Courbes polynomiales cubiques

- Exercice (suite)

