Conception et fabrication assistée par ordinateur *CFAO*

Master construction mécanique

Par Dr. Slamani Mohamed

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Modélisation des courbes

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Courbes de Bézier

- Formulation générale de Bézier-Bernstein (Courbe de degré n)

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} P_i \right]$$

- Fonction d'influence : fonction polynomiale de Bernstein:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$$

avec $u \in [0, 1]$

- Ces fonctions peuvent être représentée graphiquement comme précédemment par (n + 1) courbes.

Courbes B-spline

Pour concevoir une courbe B-spline, nous avons besoin:

- d'un ensemble de points de contrôle (P_i),
- d'un ensemble de nœuds (u)
- d'un degré de courbe (k-1).

Courbes B-spline

- $P(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) p_i \qquad (u_0 < u < u_m)..$

Fonction de base $= N_{i,k}(u)$

Degré de courbe $\rightarrow k\text{-}1$

Points de contrôle $p_i \rightarrow 0 < i < n$

Nœud, $u \rightarrow u_0 < u < u_m$

$m = n + k$

Courbes B-spline

Vecteur nodal uniforme

Nœuds non périodiques (nœuds ouverts)

- Les premier et dernier nœuds sont dupliqué k fois.
- Exemple: (0,0,0,1,2,2,2)
- La courbe passe par le premier et le dernier point
- contrôle

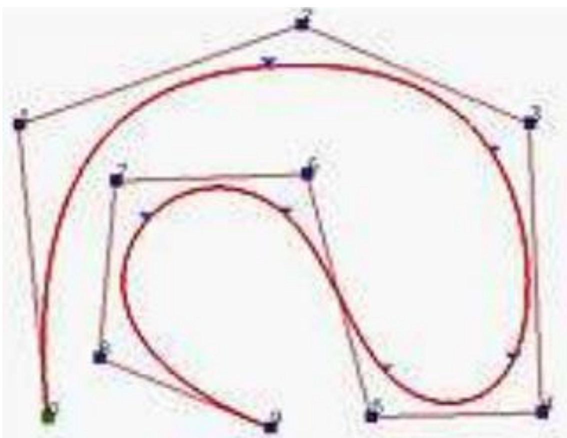
Nœuds périodiques (nœuds non ouverts)

- Les premier et dernier nœuds ne sont pas dupliqués - même contribution.
- Exemple: (0,1,2,3)
- La courbe ne passe pas par les points finaux.
- Utilisé pour générer des courbes fermées (quand premier = derniers points de contrôle)

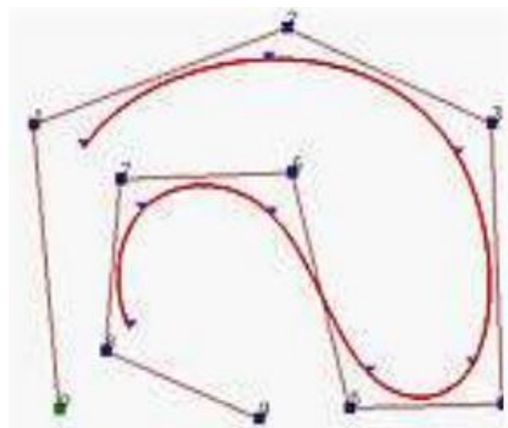
Courbes B-spline

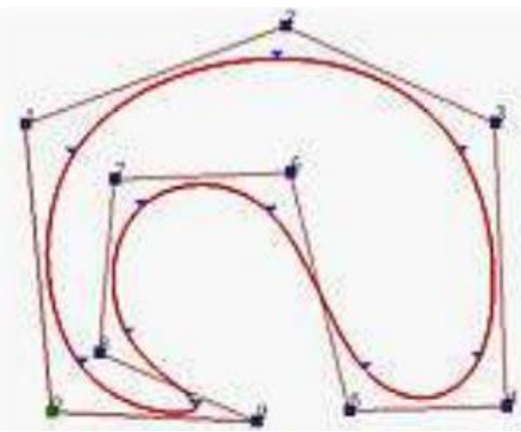
Vecteur nodal

Nœuds non périodiques (nœuds ouverts)



Nœuds périodiques (nœuds non ouverts)





(Nœuds fermés)

B-Spline uniforme non ouverte (ouverte)

- L'espacement des nœuds est régulièrement espacé sauf aux extrémités où les valeurs de nœud sont répétées k fois.

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)p_i \qquad (u_0 < u < u_m)$$

- Degré = k-1, nombre de points de contrôle = n + 1
- Nombre de nœuds = m + 1 $\longrightarrow$ n + k + 1
- Pour degré = 1 et nombre de points de contrôle = 4 (k = 2, n = 3)
- Nombre de nœuds = n + k + 1 = 6
- Vecteur nodal uniforme non périodique (0,0,1,2,3, 3)
- La valeur des nœuds entre 0 et 3 est équidistante $\longrightarrow$ uniforme

B-Spline uniforme non périodique (ouverte)

- Exemple
- Pour le degré de courbe = 3, le nombre de points de contrôle = 5
- k = 4, n = 4
- nombre de nœuds = n + k + 1 = 9
- vecteur nodal non périodiques = (0,0,0,0,1,2,2,2,2)
- Pour degré de courbe = 1, nombre de points de contrôle = 5
- k = 2, n = 4
- nombre de nœuds = n + k + 1 = 7
- vecteur nodal uniforme non périodique = (0, 0, 1, 2, 3, 4, 4)

B-Spline uniforme non périodique (ouverte)

- Pour toute valeur des paramètres k et n, les nœuds non périodiques sont déterminés à partir de

$$u_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < k \\ i - k + 1 & k \leq i \leq n \\ n - k + 2 & n < i \leq n+k \end{cases}$$

Exemple: $k=2,\ n = 3$

$$u_i = \begin{cases} 0 & 0 \leq i < 2 \\ i - 2 + 1 & 2 \leq i \leq 3 \\ 3 - 2 + 2 & 3 < i \leq 5 \end{cases}$$

$$u = (0, 0, 1, 2, 3, 3)$$

Fonction de base B-Spline

$$N_{i,k}(u)=(u-u_i)\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_i}+(u_{i+k}-u)\frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_{i+1}} \qquad (1.1)$$

$$N_{i,1}=\begin{cases}1 & u_i \le u \le u_{i+1}\\ 0 & \textbf{sinon}\end{cases}$$

Dans l'équation (1.1), les dénominateurs peuvent avoir une valeur de zéro, 0/0 étant supposé être zéro.

Si le degré est égal à zéro, la fonction de base $N_{i,1}(u)$ est égale à 1 si u est dans le i^{ème} intervalle de nœud $[u_i, u_{i+1})$.

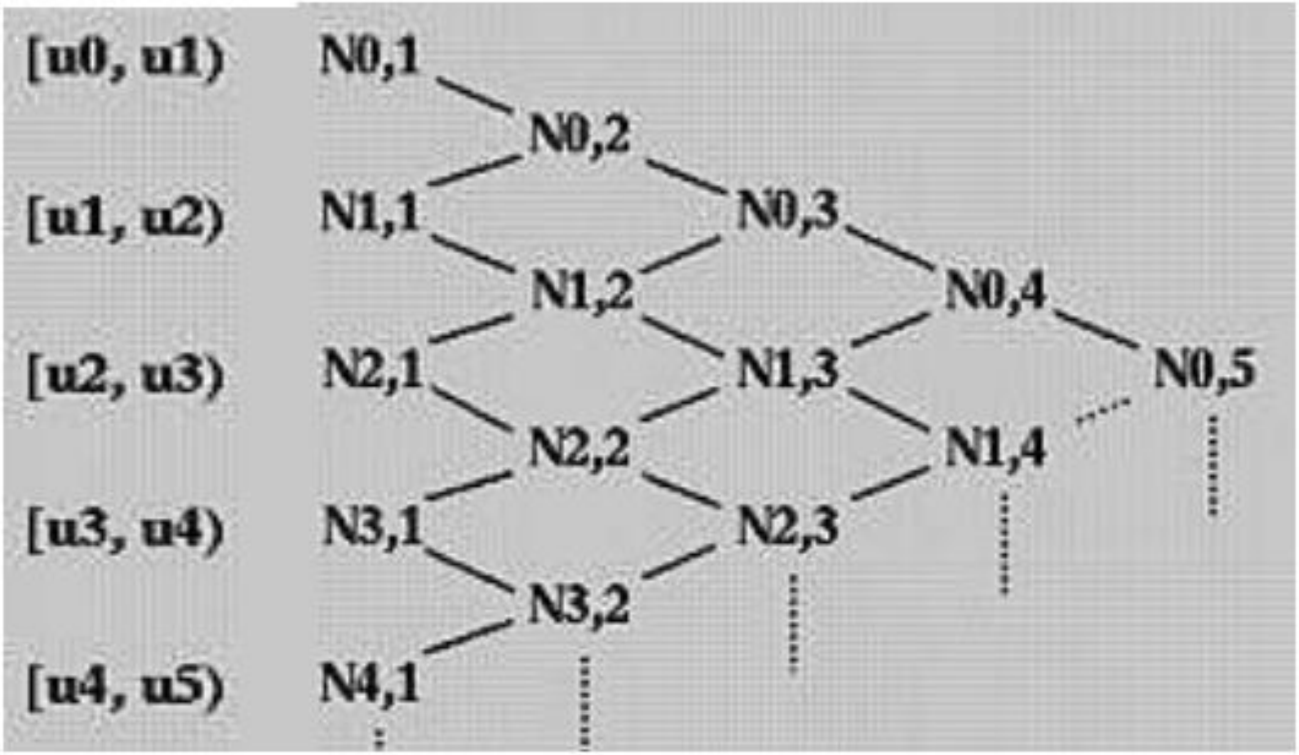
Fonction de base B-Spline

Par exemple, si nous avons quatre nœuds $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_3 = 3$, les nœuds couvrent 0, 1 et 2 sont [0,1), [1,2), [2,3)

les fonctions de base du degré 0 sont $N_{0,1}(u) = 1$ sur [0,1) et 0 ailleurs, $N_{1,1}(u) = 1$ sur [1,2) et 0 ailleurs et $N_{2,1}(u) = 1$ sur [2,3) et 0 ailleurs.

Fonction de base B-Spline

Pour comprendre la façon de calculer $N_{i,p}(u)$ pour p supérieur à 0, nous utilisons le schéma de calcul triangulaire:



Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Exemple:

Trouver les valeurs de nœud d'une B-spline uniforme et non périodique ayant un degré = 2 et 3 points de contrôle.

Trouvez ensuite l’équation de la courbe B-Spline sous forme polynomiale.

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Réponse:

- Degré $= k\text{-}1 = 2 \rightarrow k=3$
- Points de contrôle $= n + 1 = 3 \rightarrow n=2$
- Nombre de nœud $= n + k + 1 = 6$
- Valeurs de nœud $\rightarrow u_0=0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=1, u_4=1, u_5= 1$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Pour obtenir l'équation polynomiale,

$$P(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u)p_i$$

- $$= \sum_{i=0}^{2} N_{i,3}(u)p_i$$
- $$= N_{0,3}(u)p_0 + N_{1,3}(u)p_1 + N_{2,3}(u)p_2$$

Premièrement, trouvez le $N_{i,k}(u)$ en utilisant la valeur du nœud indiquée ci-dessus, commencez par k = 1 à k = 3.

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Pour k = 1, trouvez $N_{i,1}(u)$

- $N_{0,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_0 \leq u \leq u_1 \quad ; \ (u=0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$
- $N_{1,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_1 \leq u \leq u_2 \quad ; \ (u=0) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$
- $N_{2,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_2 \leq u \leq u_3 \quad ; \ (0 \leq u \leq 1) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$
- $N_{3,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_3 \leq u \leq u_4 \quad ; \ (u=1) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$
- $N_{4,1}(u) = \begin{cases} 1 & u_4 \leq u \leq u_5 \quad ; \ (u=1) \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Pour k = 2, trouvez $N_{i,2}(u)$ - utilisez l'équation (1.1):

$$N_{i,k}(u) = (u - u_i)\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1} - u_i} + (u_{i+k} - u)\frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k} - u_{i+1}}$$

- $N_{0,2}(u) = \frac{u - u_0}{u_1 - u_0} N_{0,1} + \frac{u_2 - u}{u_2 - u_1} N_{1,1} \qquad (u_0 = u_1 = u_2 = 0)$
- $= \frac{u - 0}{0 - 0} N_{0,1} + \frac{0 - u}{0 - 0} N_{1,1} = 0$
- $N_{1,2}(u) = \frac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_{1,1} + \frac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,1} \qquad (u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = 1)$
- $= \frac{u - 0}{0 - 0} N_{1,1} + \frac{1 - u}{1 - 0} N_{2,1} = 1 - u$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

- $N_{2,2}(u) = \quad \underline{u - u_2}\, N_{2,1} \; + \underline{u_4 - u}\, N_{3,1} \qquad (u_2 = 0,\ u_3 = u_4 = 1)$
- $\qquad\qquad u_3 - u_2 \qquad\qquad u_4 - u_3$
- $\qquad = \quad \underline{u - 0}\, N_{2,1} + \quad \underline{1 - u}\, N_{3,1} \;=\; u$
- $\qquad\qquad 1 - 0 \qquad\qquad 1 - 1$
- $N_{3,2}(u) = \quad \underline{u - u_3}\, N_{3,1} \; + \underline{u_5 - u}\, N_{4,1} \qquad (u_3 = u_4 = u_5 = 1)$
- $\qquad\qquad u_4 - u_3 \qquad\qquad u_5 - u_4$
- $\qquad = \quad \underline{u - 1}\, N_{3,1} + \quad \underline{1 - u}\, N_{4,1} \;=\; 0$
- $\qquad\qquad 1 - 1 \qquad\qquad 1 - 1$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Pour k = 2

$$N_{0,2}(u) = 0$$

$$N_{1,2}(u) = 1 - u$$

$$N_{2,2}(u) = u$$

$$N_{3,2}(u) = 0$$

1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Pour k = 3, trouvez $N_{i,3}(u)$ - utilisez l'équation (1.1):

$$N_{i,k}(u) = (u - u_i)\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1} - u_i} + (u_{i+k} - u)\frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k} - u_{i+1}}$$

- $N_{0,3}(u) = \dfrac{u - u_0}{u_2 - u_0} N_{0,2} + \dfrac{u_3 - u}{u_3 - u_1} N_{1,2} \qquad (u_0 = u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = 1)$
- $= \dfrac{u - 0}{0 - 0} N_{0,2} + \dfrac{1 - u}{1 - 0} N_{1,2} = (1-u)(1-u) = (1-u)^2$
- $N_{1,3}(u) = \dfrac{u - u_1}{u_3 - u_1} N_{1,2} + \dfrac{u_4 - u}{u_4 - u_2} N_{2,2} \qquad (u_1 = u_2 = 0,\ u_3 = u_4 = 1)$
- $= \dfrac{u - 0}{1 - 0} N_{1,2} + \dfrac{1 - u}{1 - 0} N_{2,2} = u(1 - u) + (1-u)u = 2u(1-u)$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

- $N_{2,3}(u) = \dfrac{u - u_2}{u_4 - u_2} N_{2,2} + \dfrac{u_5 - u}{u_5 - u_3} N_{3,2}$ $\quad (u_2 = 0,\ u_3 = u_4 = u_5 = 1)$
- $= \dfrac{u - 0}{1 - 0} N_{2,2} + \dfrac{1 - u}{1 - 1} N_{3,2} = u^2$

$N_{0,3}(u) = (1-u)^2,\qquad N_{1,3}(u) = 2u(1-u),\qquad N_{2,3}(u) = u^2$

L'équation polynomiale, $P(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,k}(u) p_i$

- $P(u) = N_{0,3}(u)p_0 + N_{1,3}(u)p_1 + N_{2,3}(u)p_2$
- $= (1-u)^2 p_0 + 2u(1-u)\, p_1 + u^2 p_2 \quad (0 <= u <= 1)$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Exercice:

- Trouver l'équation polynomiale de la courbe avec degré = 1 et nombre de points de contrôle = 4.

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

$k = 2$, $n = 3$ → nombre de nœuds = 6

Vecteur nodal = (0, 0, 1, 2, 3, 3)

Pour k = 1, trouvez $N_{i,1}(u)$

- $N_{0,1}(u) = 1 \quad u_0 \leq u \leq u_1 \quad ; \; (u=0)$
- $N_{1,1}(u) = 1 \quad u_1 \leq u \leq u_2 \quad ; \; (0 \leq u \leq 1)$

  $N_{2,1}(u) = 1 \quad u_2 \leq u \leq u_3 \quad ; \; (1 \leq u \leq 2)$
- $N_{3,1}(u) = 1 \quad u_3 \leq u \leq u_4 \quad ; \; (2 \leq u \leq 3)$

  $N_{4,1}(u) = 1 \quad u_4 \leq u \leq u_5 \quad ; \; (u=3)$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Pour k = 2, trouvez $N_{i,2}(u)$

$$N_{i,k}(u)=(u-u_i)\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_i}+(u_{i+k}-u)\frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_{i+1}}$$

- $N_{0,2}(u) = \quad \underline{u - u_0}\, N_{0,1} + \underline{u_2 - u}\, N_{1,1} \qquad (u_0 = u_1 = 0,\ u_2 = 1)$
- $\qquad u_1 - u_0 \qquad\qquad u_2 - u_1$
- $\qquad = \underline{u - 0}\, N_{0,1} + \underline{1 - u}\, N_{1,1}$
- $\qquad 0 - 0 \qquad\qquad 1 - 0$
- $\qquad = 1 - u \qquad\qquad (0 \leq u \leq 1)$

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

$$N_{i,k}(u)=(u-u_i)\frac{N_{i,k-1}(u)}{u_{i+k-1}-u_i}+(u_{i+k}-u)\frac{N_{i+1,k-1}(u)}{u_{i+k}-u_{i+1}}$$

- $N_{1,2}(u) = \dfrac{u - u_1}{u_2 - u_1} N_{1,1} + \dfrac{u_3 - u}{u_3 - u_2} N_{2,1}$ $(u_1 = 0,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2)$
- $= \dfrac{u - 0}{1 - 0} N_{1,1} + \dfrac{2 - u}{2 - 1} N_{2,1}$
- $N_{1,2}(u) = u \quad (0 \leq u \leq 1)$
- $N_{1,2}(u) = 2 - u \quad (1 \leq u \leq 2)$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

- $N_{2,2}(u) = \quad \underline{u - u_2}\, N_{2,1} \; + \underline{u_4 - u}\, N_{3,1} \qquad (u_2 = 1,\ u_3 = 2, u_4 = 3)$
- $\qquad\qquad\qquad u_3 - u_2 \qquad\qquad u_4 - u_3$
- $\qquad\qquad = \quad \underline{u - 1}\, N_{2,1} + \quad \underline{3 - u}\, N_{3,1} \quad =$
- $\qquad\qquad\qquad 2 - 1 \qquad\qquad\qquad 3 - 2$
- $N_{2,2}(u) = \quad u - 1 \quad (1 \leq u \leq 2)$
- $N_{2,2}(u) \ = 3 - u \qquad (2 \leq u \leq 3)$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

- $N_{3,2}(u) = \dfrac{u - u_3}{u_4 - u_3} N_{3,1} + \dfrac{u_5 - u}{u_5 - u_4} N_{4,1} \quad (u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 3)$
- $= \dfrac{u - 2}{3 - 2} N_{3,1} + \dfrac{3 - u}{3 - 3} N_{4,1} =$
- $= u - 2 \quad (2 \leq u \leq 3)$

Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

- L'équation polynomiale, $P(u) = \sum N_{i,k}(u)p_i$
- $P(u) = N_{0,2}(u)p_0 + N_{1,2}(u)p_1 + N_{2,2}(u)p_2 + N_{3,2}(u)p_3$

- $P(u) = (1 - u)\, p_0 + \; u\, p_1$ $\qquad (0 \leq u \leq 1)$
- $P(u) = (2 - u)\, p_1 + \; (u - 1)\, p_2$ $\qquad (1 \leq u \leq 2)$
- $P(u) = (3 - u)\, p_2 + \; (u - 2)\, p_3$ $\qquad (2 \leq u \leq 3)$

Nœud uniforme périodique

Les nœuds périodiques sont déterminés à partir de

– $U_i = i - k \ (0 \leq i \leq n+k)$

Exemple:

- Pour une courbe de degré = 3 et nombre de points de contrôle = 4 (B-spline cubique)

– $(k = 4, n = 3)$ → nombre de nœuds = 8

– (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8)

Nœud uniforme périodique

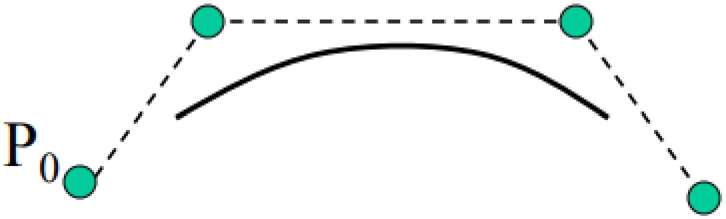
- Normaliser $u \ (0 <= u <= 1)$
- $N_{0,4}(u) = 1/6\ (1-u)^3$
- $N_{1,4}(u) = 1/6\ (3u^3 - 6u^2 + 4)$
- $N_{2,4}(u) = 1/6\ (-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)$
- $N_{3,4}(u) = 1/6\ u^3$

- $P(u) = N_{0,4}(u)p_0 + N_{1,4}(u)p_1 + N_{2,4}(u)p_2 + N_{3,4}(u)p_3$

Nœud uniforme périodique

Sous forme matricielle:

- $P(u) = [u^3, u^2, u, 1].M_n.\begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}$
- $M_n = 1/6 \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



Non périodique(ouvert) B-Spline uniforme

Exemple:

Trouver les valeurs de nœud d'une B-spline uniforme et non périodique ayant un degré = 3 et 4 points de contrôle.

Trouvez ensuite l’équation de la courbe B-Spline sous forme polynomiale.

Micro-interro

Exemple:

Trouver les valeurs de nœud d'une B-spline uniforme et non périodique ayant un degré = 2 et 3 points de contrôle.

Trouvez ensuite l'équation de la courbe B-Spline sous forme polynomiale.

Solution

Réponse:

- Degré $= k\text{-}1 = 2 \rightarrow k=3$
- Points de contrôle $= n + 1 = 3 \rightarrow n=2$
- Nombre de nœud : $= n + k + 1 = 6$
- Valeurs de nœud $\rightarrow u_0=0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=1, u_4=1, u_5= 1$