Conception et fabrication assistée par ordinateur *CFAO*

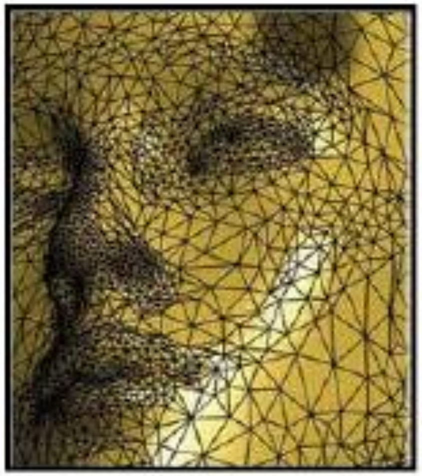
Master construction mécanique

Par Dr. Slamani Mohamed

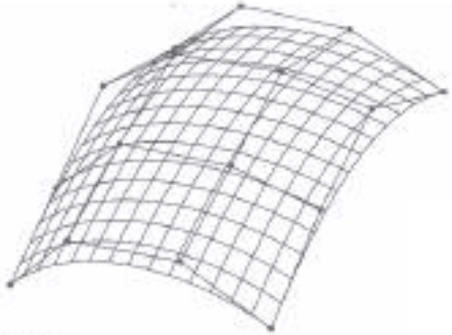
Modélisation des surfaces

Modèle surfacique

- Construction du modèle surfacique par points
  - Interpolation / approximation de points
    - Beaucoup…



    - ou peu;



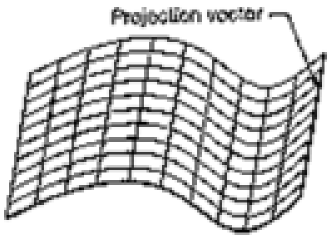
(a) Bézier surface

Modèle surfacique

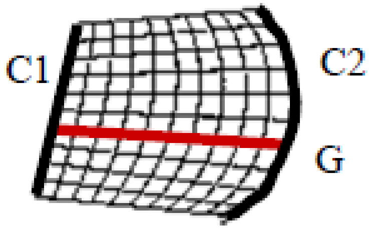
- Construction du modèle surfacique par points (suite)
  - Surfaces à variation globale:
    La surface ou ses courbes sont définies
    par un ensemble de points de contrôle.
    Le déplacement d'un point modifie
    la surface *globalement*.
  - Surfaces à variation locale:
    La surface ou ses courbes sont définies
    par un ensemble de points de contrôle.
    Le déplacement d'un point modifie
    la surface *localement*.

Modèle surfacique

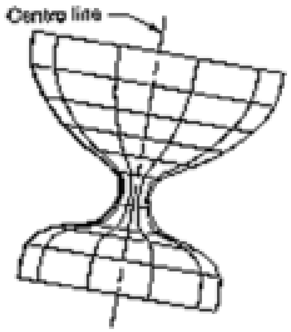
- Construction du modèle surfacique par courbes
  - Surface cylindrique:
    Projection d'une courbe génératrice
    le long d'un vecteur;



  - Surface réglée:
    Balayage d'un segment de droite
    entre deux courbes;

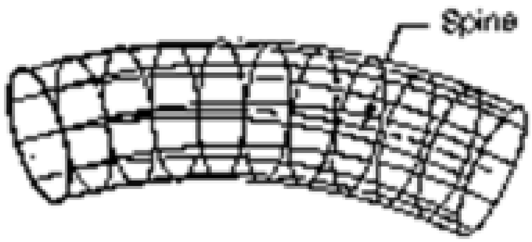


  - Surface de révolution:
    Révolution d'une courbe génératrice
    autour d'une ligne ou d'un axe.

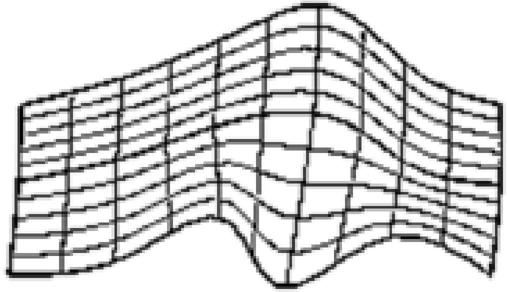


Modèle surfacique

- Construction du modèle surfacique par courbes (suite)
  - Surface par balayage:
    Déplacement d'un profil le long d'une courbe génératrice

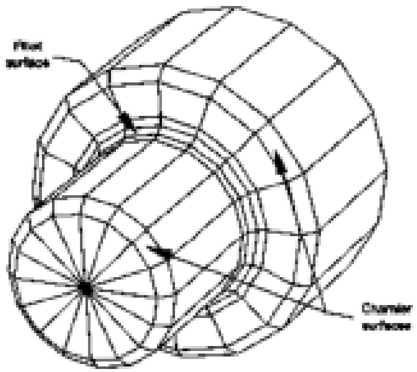


  - Surface sculptée:
    Surface définie par un ensemble de courbes génératrices formant une grille.
    - Type de surface le plus général

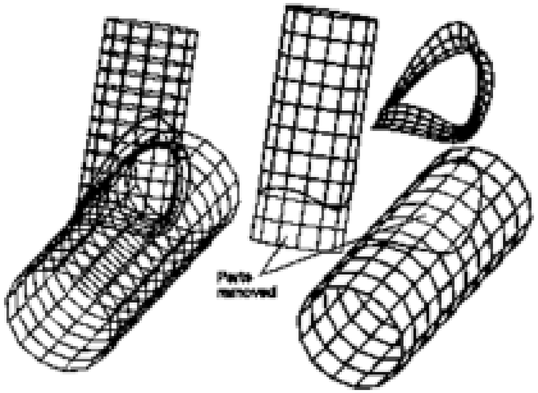


Modèle surfacique

- Construction du modèle surfacique à partir d'autres surfaces
  - Typiquement, ce sont des surfaces permettant de joindre des surfaces existantes.
    - Exemples : chanfreins, congés de raccordement, etc.



  - Complexité associée à la génération de telles surfaces (congés) issues de l'intersection de surfaces existantes.



Représentation paramétrique

- Comme pour les courbes, les surfaces peuvent être représentées sous forme :
  - Implicite: $f(x,y,z) = 0$;
  - Explicite: $z = f(x,y)$;
  - Paramétrique:
    - Meilleur contrôle dans la description des surfaces,
    - Contrôle des sous-domaines pour diviser une surface complexe en *carreaux* simples.

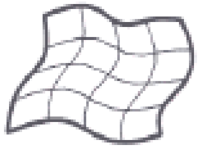
Représentation paramétrique

- Forme générale d'une surface paramétrée:
  - Pour une courbe, un seul paramètre est nécessaire :

    $x = x(u)$ $y = y(u)$ $z = z(u)$

  - Pour une surface, deux paramètres sont nécessaires :

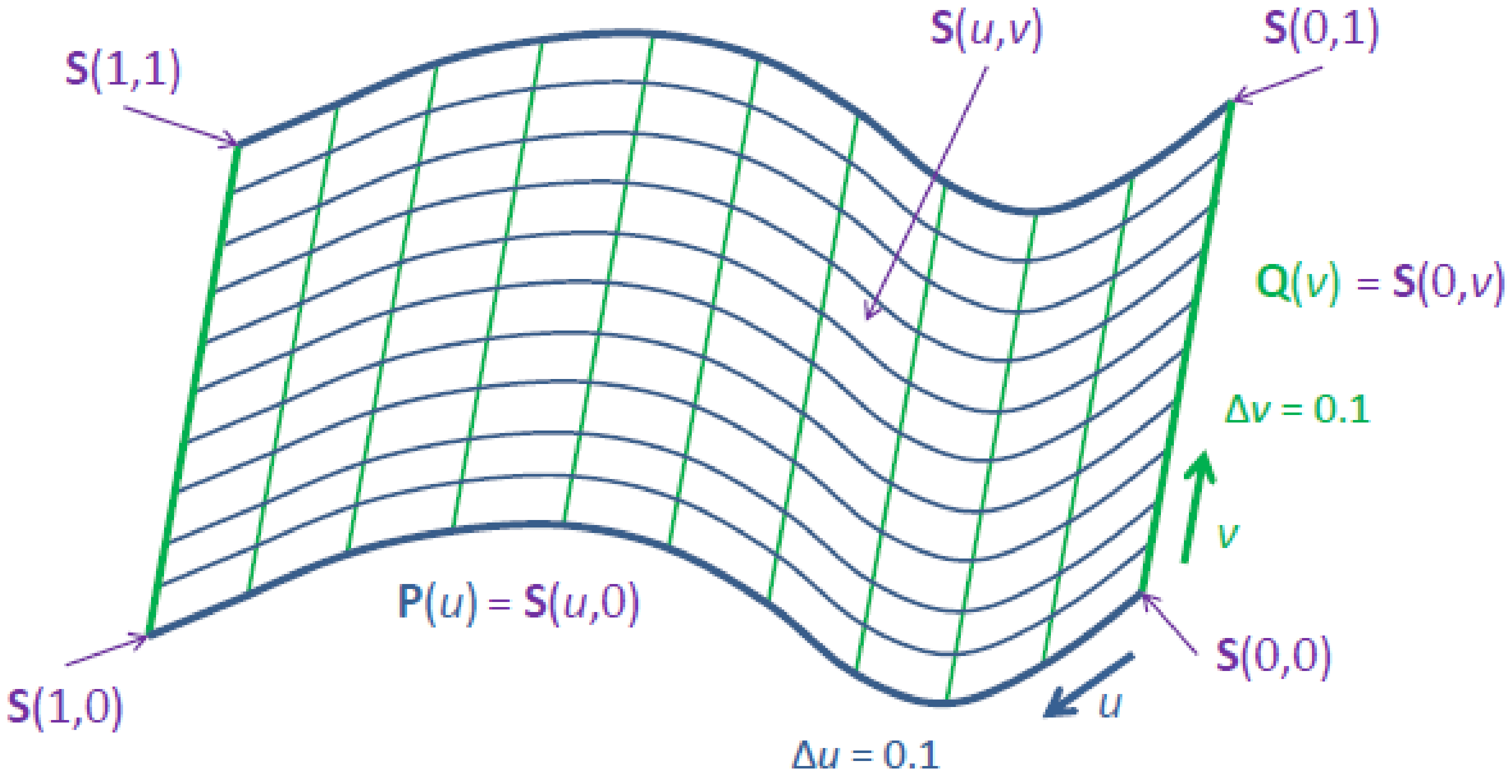
    $x = x(u,v)$ $y = y(u,v)$ $z = z(u,v)$



- Caractéristiques générales
  - Les techniques de représentation sont des extensions des courbes paramétriques dans la seconde dimension ***v***;
  - Les surfaces ainsi obtenues partagent beaucoup de caractéristiques avec les courbes correspondantes.

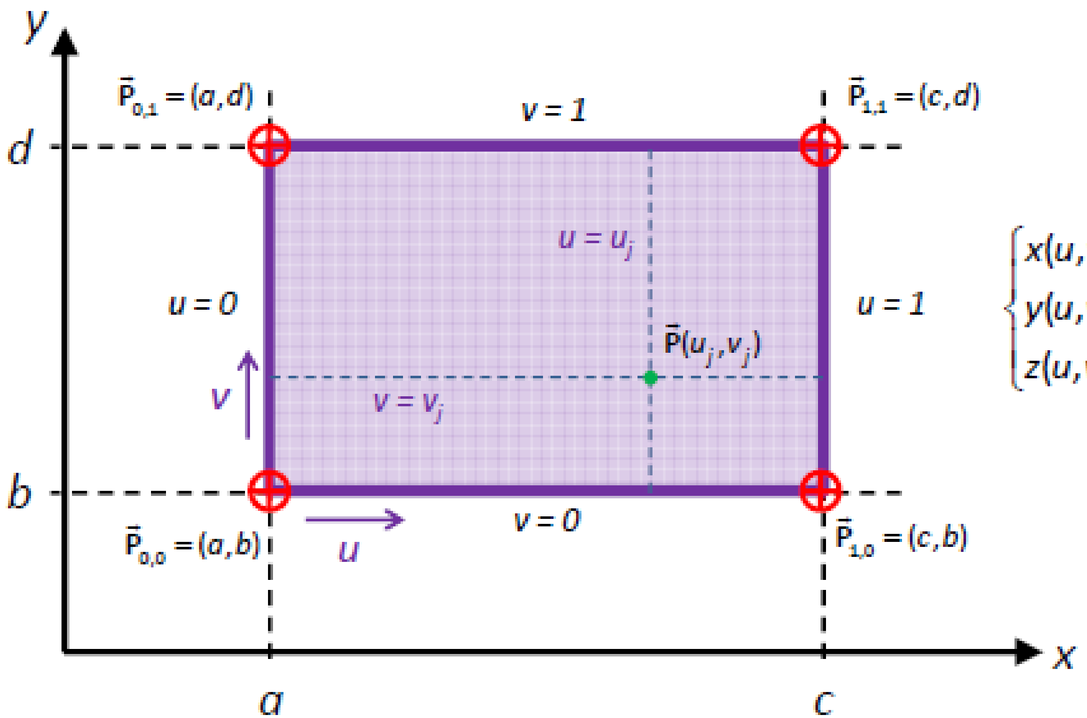
Représentation paramétrique

- Courbes iso-paramétriques d'une face:



Représentation paramétrique

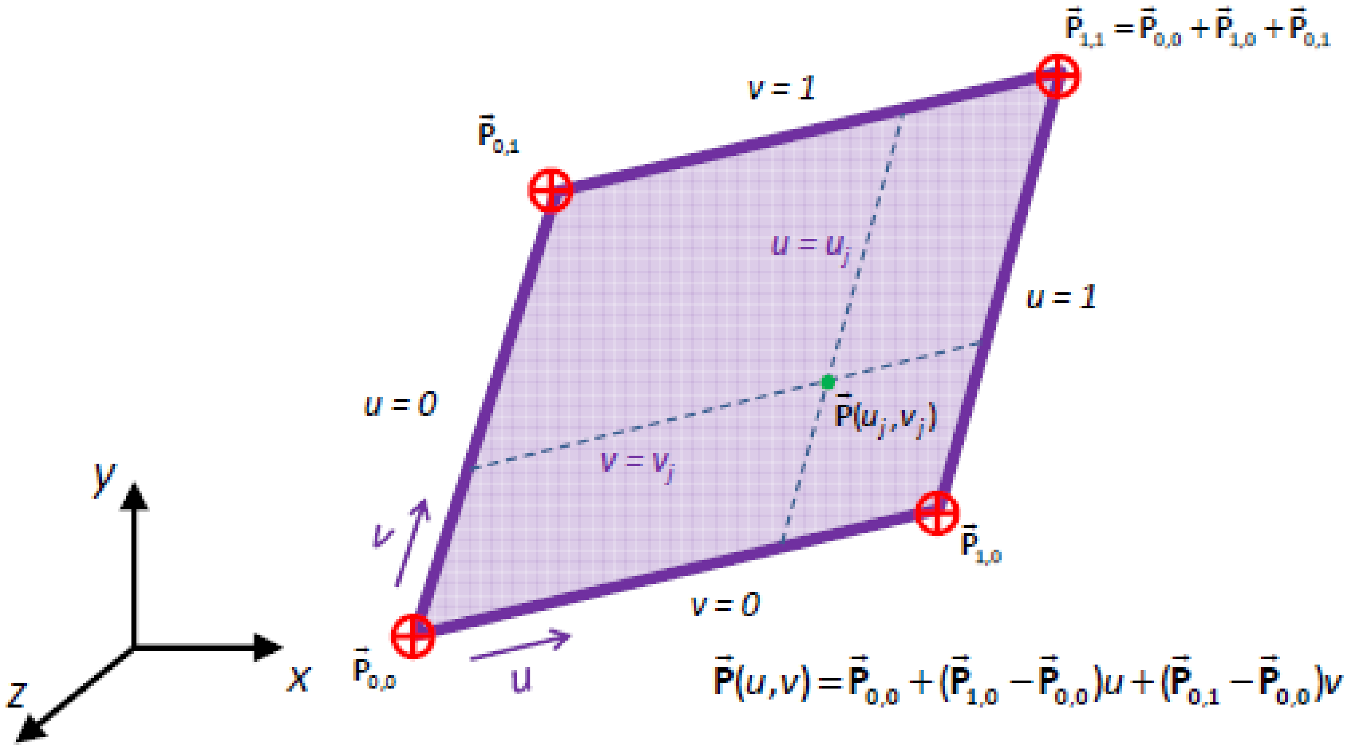
- Exemple simple: Carreau rectangulaire du plan XY…
  - Sommets $\mathbf{P}_{0,0}(a, b)$, $\mathbf{P}_{1,0}(c, b)$, $\mathbf{P}_{1,1}(c, d)$, $\mathbf{P}_{0,1}(a, d)$…



$$\begin{cases} x(u,v) = a + (c-a)u \\ y(u,v) = b + (d-b)v \\ z(u,v) = 0 \end{cases}$$

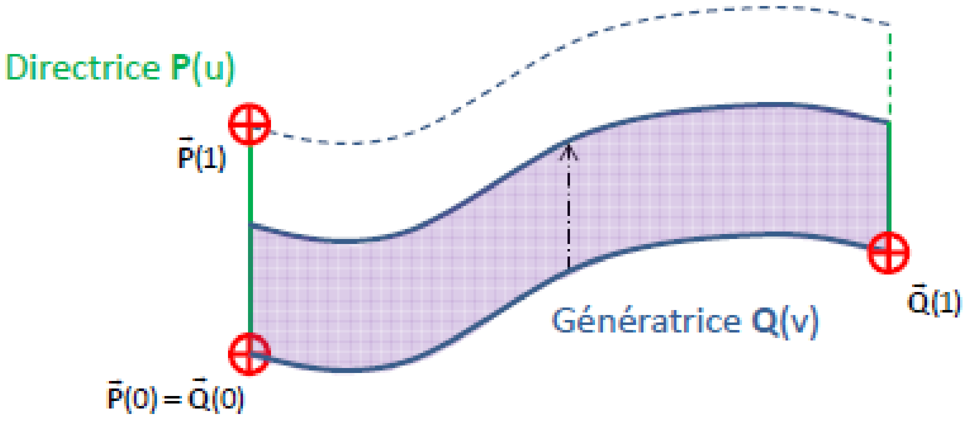
Représentation paramétrique

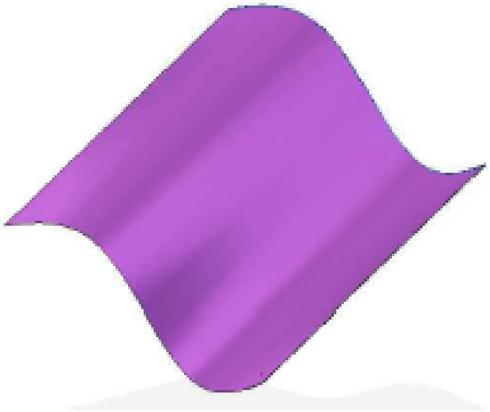
- Exemple: Surface bilinéaire (planaire) dans l'espace 3D…
  - Sommets $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{1,0}$, $\mathbf{P}_{1,1}$, $\mathbf{P}_{0,1}$



Surfaces balayées

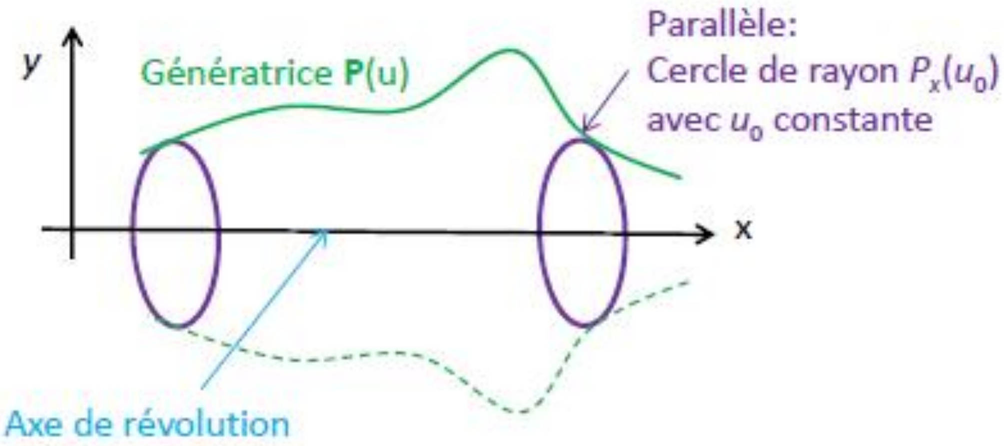
- Surface cylindrique
  - Créée par une droite <u>*directrice*</u> sur laquelle est translatée de manière parallèle une courbe <u>*génératrice*</u>.
  - Si la génératrice est un cercle, on obtient un cylindre circulaire;
  - *SE*: Extrusion = directrice droite (direction + distance) + profil générateur quelconque (esquisse);

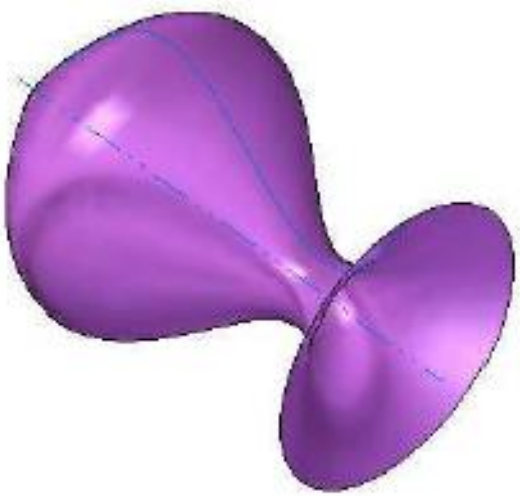




Surfaces balayées

- Surface de révolution
  - Obtenue par révolution d'une courbe *génératrice* autour d'un axe de révolution;
    - Génératrice = courbe déplacée qui balaie la surface;
  - L'intersection d'un plan perpendiculaire à l'axe de révolution qui coupe la surface donne un cercle nomme *parallèle*;



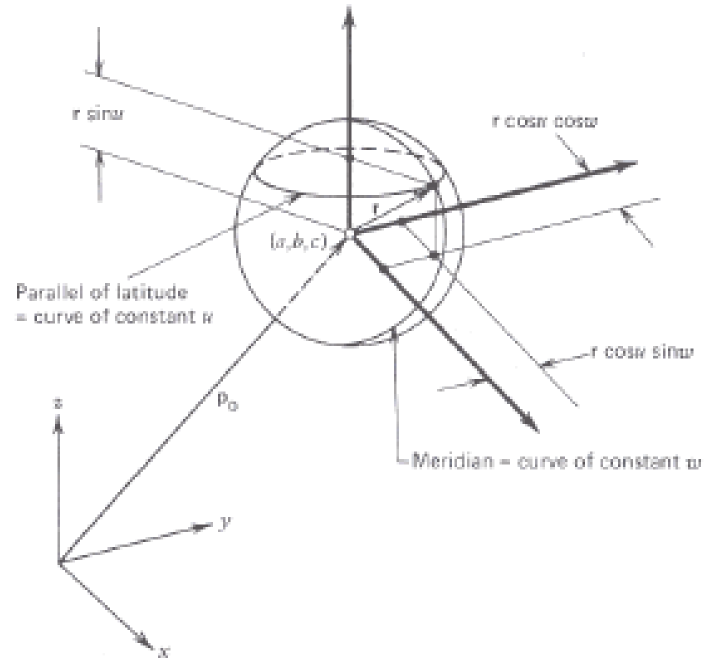


Représentation paramétrique

- Surface sphérique centrée en $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$\vec{\mathbf{S}}(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = x_0 + r\cdot\cos(u)\cdot\cos(w) \\ y(u,v) = y_0 + r\cdot\cos(u)\cdot\sin(w) \\ z(u,v) = z_0 + r\cdot\sin(u) \end{cases} \quad , u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], w \in [0, 2\pi]$$

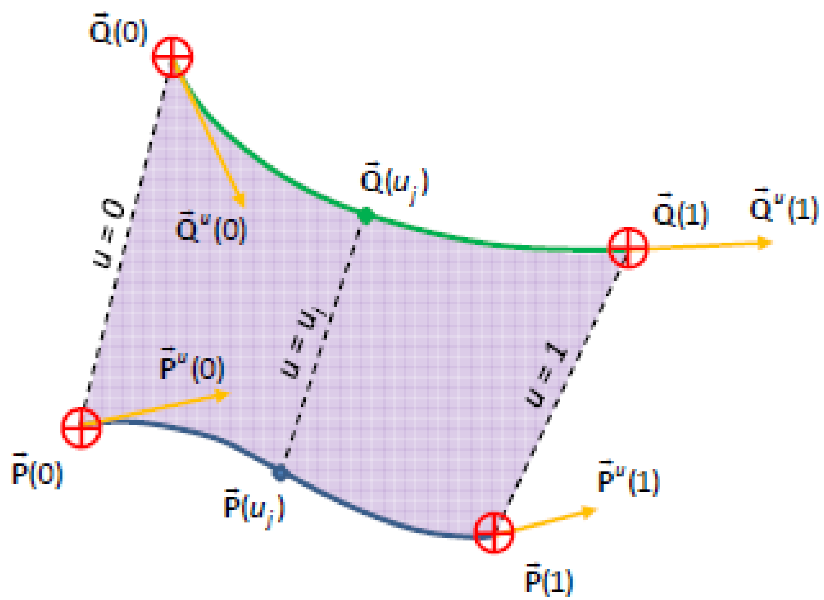
  - Parallèles (latitude): courbes iso-paramétriques à u constant;
  - Méridiens (longitude): courbes iso-paramétriques à w cste;

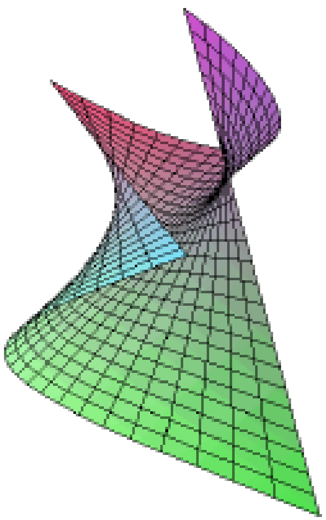


  - Exercice: Sphère de rayon 2 située au point (-1,1,4); Équation de l'équateur?

Surfaces balayées

- Surface réglée
  - Surface telle que en chaque point de la surface passe un segment de droite complètement contenu dans la surface;
  - Peut être obtenue par balayage d'un segment de droite (génératrice) qui se déplace entre deux courbes quelconques.

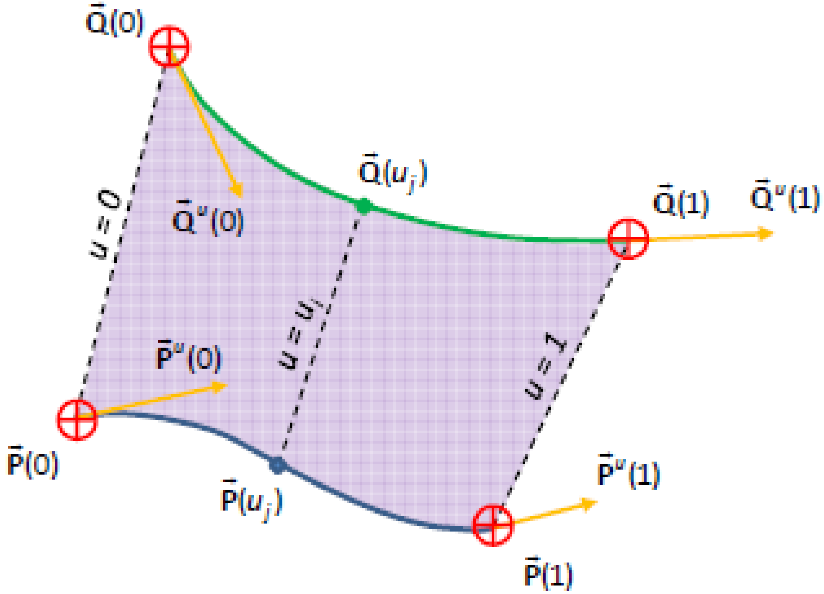




Surfaces balayées

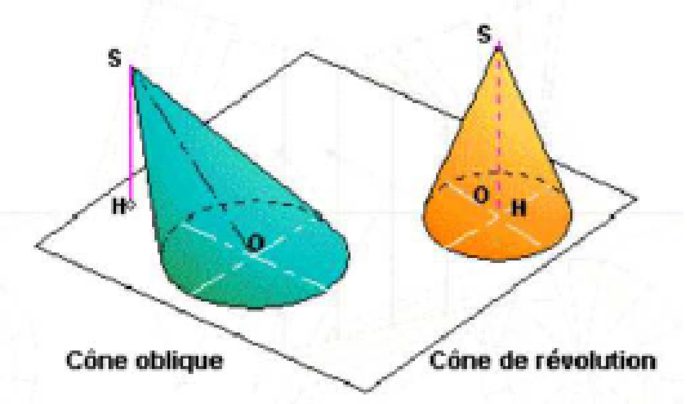
- Surface réglée (formulation mathématique):
  - Soit deux courbes **P**(u) et **Q**(u) définie dans l'espace 3D en fonction du même paramètre u variant de 0 a 1;
    - Si **P**(u) et **Q**(v), effectuer un changement de variable $v = f(u)$;
  - Le principe revient à former un segment de droite entre tous les points évalués **P**(u_i) et **Q**(u_i):

$$\vec{\mathbf{S}}(u,v) = (1-v)\vec{\mathbf{P}}(u) + v\vec{\mathbf{Q}}(u)$$



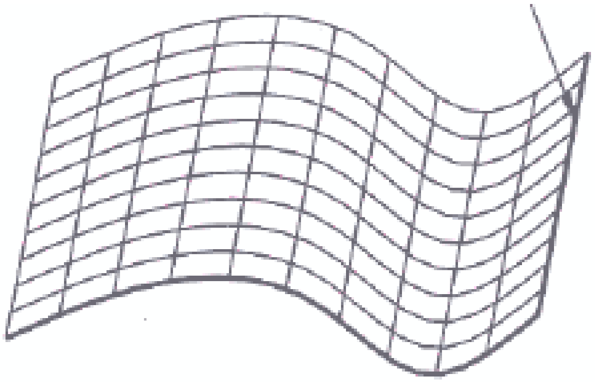
Surfaces balayées

- Surface conique
  - Une surface conique est engendrée par une droite génératrice passant par un point fixe S (sommet) et s'appuyant sur une courbe plane;
  - Cône de révolution: directrice circulaire, hauteur passant par le centre du cercle;
  - Cône oblique: toutes courbes, hauteur hors centre de la courbe;
  - La génératrice peut être différente d'une droite...
    - Ex.: Génératrice est une parabole = cône parabolique.



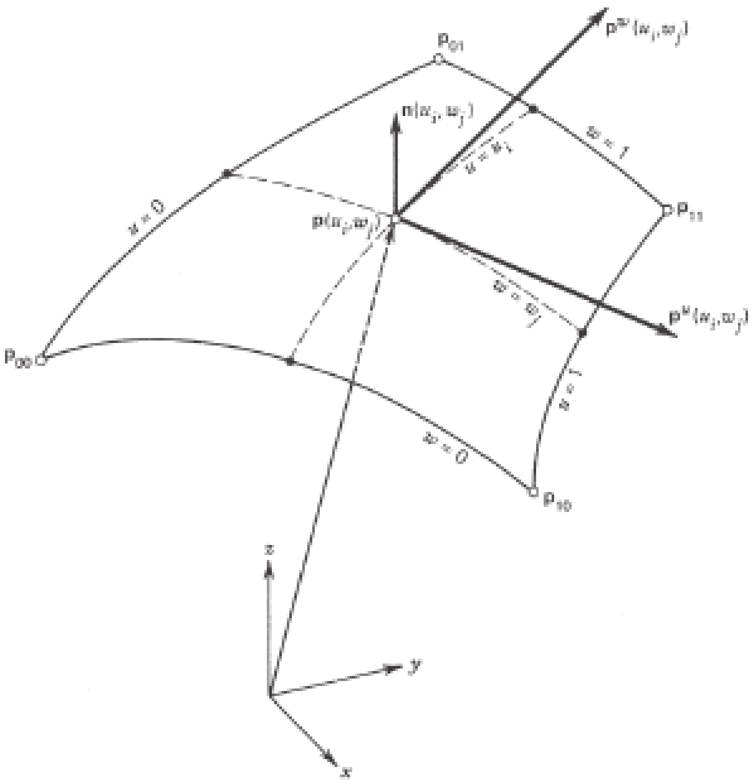
Carreaux de surface

- Caractéristiques générales:
  - Élément de base dans la définition de surfaces complexes;
  - Équivalent aux segments pour la définition des courbes;
  - Un carreau est considéré ***bi-paramétrique*** puisqu'il est décrit par deux paramètres (***u*** et ***v***);
  - Pour un carreau, ***u*** et ***v*** varient habituellement de 0 a 1;
  - En fixant ***u*** ou ***v***, on génère une courbe ***iso-paramétrique*** sur la surface définie en fonction du 2e paramètre;
  - Une surface est ainsi décrite par un réseau de courbes iso-paramétriques;
  - Ici, incrément de 0.1 en ***u*** et ***v***.



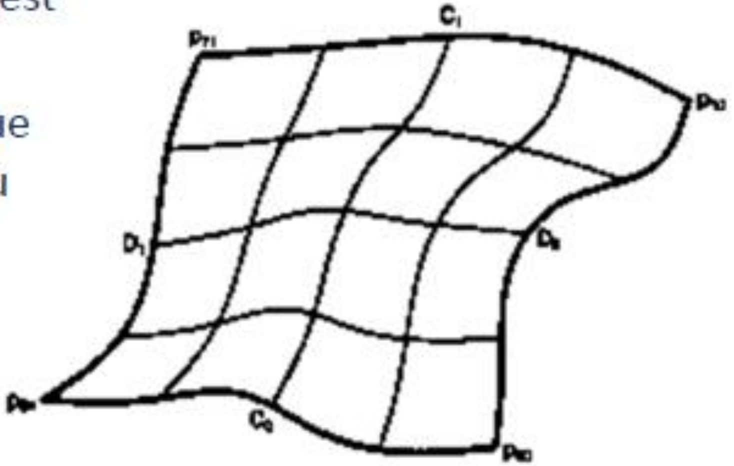
Carreaux de surface

- Pour chaque carreau, il faut déterminer les conditions aux frontières (contraintes géométriques):
  - Surface de Coon (*Coon's patch*):
    - 4 points (coins),
    - 4 courbes frontières;
  - Surface bicubique (L'Hermite):
    - 4 points,
    - 8 vecteurs de tangence,
    - 4 vecteurs de torsion.



Carreaux de surface

- Surface de Coon (*Coon's Patch*)
  - Steven Anson Coon, MIT, 1960s;
  - Ensemble de techniques d'interpolation entres les courbes qui définissent le contour d'une surface;
  - L'interpolation linéaire est la plus simple;
  - L'interpolation de degré supérieur est également utilisée;
  - Par exemple, l'interpolation cubique permet d'assurer une continuité au niveau des tangentes entres des carreaux adjacents.



Surface spline bi-cubique

- Surface spline générale:
  Représentation par une suite de polynômes de degré *n*;
- Forme bi-cubique:
  - Polynômes de degré 3,
  - ≪ Bi ≫ : deux variables paramétriques nécessaires;
- Équivalent ‘surface’ des courbes cubiques paramétrées;
- Elles sont définies par des points et des vecteurs de tangence;
  - Pour une courbe cubique, quatre conditions frontières requises;
  - Pour une surface, il faut seize conditions frontières (4×4).

Surface spline bi-cubique

- Forme algébrique:
  - Pour une courbe polynomiale cubique nous avions :

$$\vec{\mathbf{P}}(u)=\sum_{i=0}^{n=3} a_i u^i \quad , \text{avec } u\in[0,1]$$

  - Dans le cas d'une surface bi-cubique nous avons :

$$\vec{\mathbf{S}}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij} u^i v^j \quad , \text{avec } u,v\in[0,1]$$

  - Polynôme de 16 termes;
  - Chaque vecteur a_{ij} comprend 3 inconnues $(a_x, a_y, a_z)_{ij}$:

$$x(u,v)=(a_x)_{33}u^3v^3+(a_x)_{32}u^3v^2+\ldots+(a_x)_{00}$$

  - On a donc 48 coefficients algébriques ou degrés de liberté.

Surface spline bi-cubique

- Forme matricielle:

$$\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{U}}\mathbf{A}\vec{\mathbf{V}}^T$$

$$\vec{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}$$

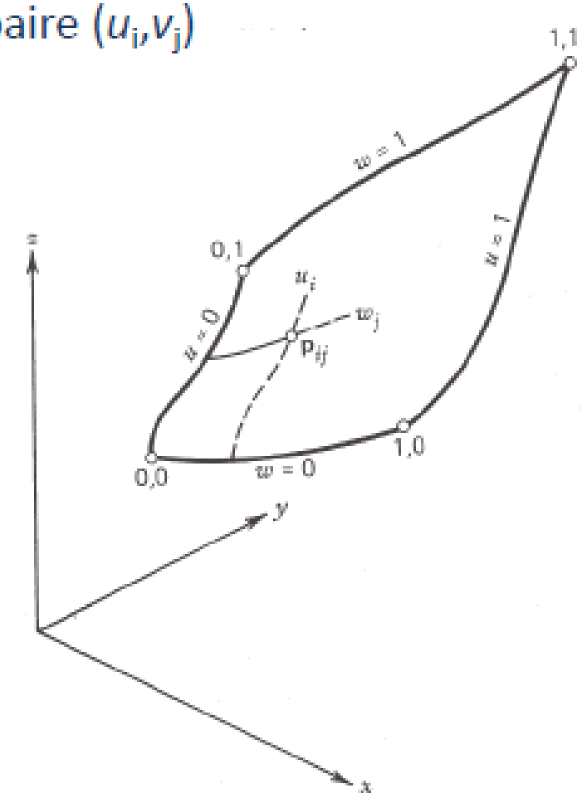
$$\vec{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_{33} & \vec{\mathbf{a}}_{32} & \vec{\mathbf{a}}_{31} & \vec{\mathbf{a}}_{30} \\ \vec{\mathbf{a}}_{23} & \vec{\mathbf{a}}_{22} & \vec{\mathbf{a}}_{21} & \vec{\mathbf{a}}_{20} \\ \vec{\mathbf{a}}_{13} & \vec{\mathbf{a}}_{12} & \vec{\mathbf{a}}_{11} & \vec{\mathbf{a}}_{10} \\ \vec{\mathbf{a}}_{03} & \vec{\mathbf{a}}_{02} & \vec{\mathbf{a}}_{01} & \vec{\mathbf{a}}_{00} \end{bmatrix}$$

- Chaque élément de **A** possède 3 composantes (*x*, *y*, *z*), donc la matrice est 4x4x3.

Surface spline bi-cubique

- Chaque surface possède ses 48 coefficients (ou 16 vecteurs) propres qui déterminent sa forme et sa position;
  - 1 point sur la surface existe pour chaque paire (u_i,v_j)
  - Pour déterminer les 48 degrés de liberté:
    - Technique de Lagrange:
      - Requiert grille de seize points (4 × 4) avec valeurs de paramètres *u* et *v*;
    - Technique de l'Hermite:
      - Points (4)
      - Vecteurs de tangence (8)
      - Vecteurs de torsion (4).



Surface spline bi-cubique

- Interpolation d'Hermite:
  - Seize conditions frontières sont :
    - Les points aux quatre coins du carreau:

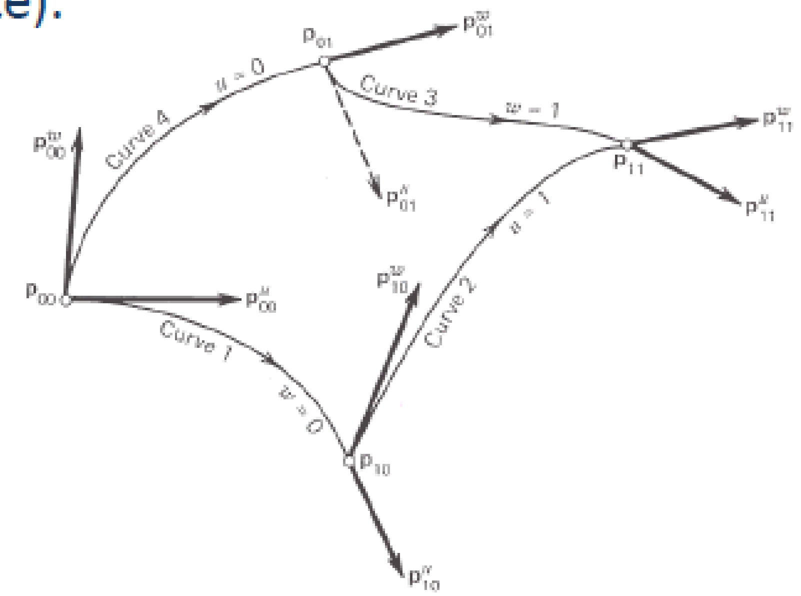
      $\mathbf{P}_{00}, \mathbf{P}_{01}, \mathbf{P}_{10}, \mathbf{P}_{11}$
    - Les deux vecteurs de tangente selon *u* et *v* à chaque coin, ce qui apportent huit conditions supplémentaires :

      $\mathbf{P}^u_{00}, \mathbf{P}^u_{01}, \mathbf{P}^u_{10}, \mathbf{P}^u_{11}, \mathbf{P}^v_{00}, \mathbf{P}^v_{01}, \mathbf{P}^v_{10}, \mathbf{P}^v_{11}$
    - Les ***vecteurs de dérivée croisée*** $\partial^2\mathbf{P}/\partial u \partial v$ à chaque coin:

      $\mathbf{P}^{uv}_{00}, \mathbf{P}^{uv}_{01}, \mathbf{P}^{uv}_{10}, \mathbf{P}^{uv}_{11}$
      - Les ***vecteurs de dérivée croisée***, appelés aussi ***vecteurs de torsion*** fournissent une mesure de la torsion de la surface.

Surface spline bi-cubique

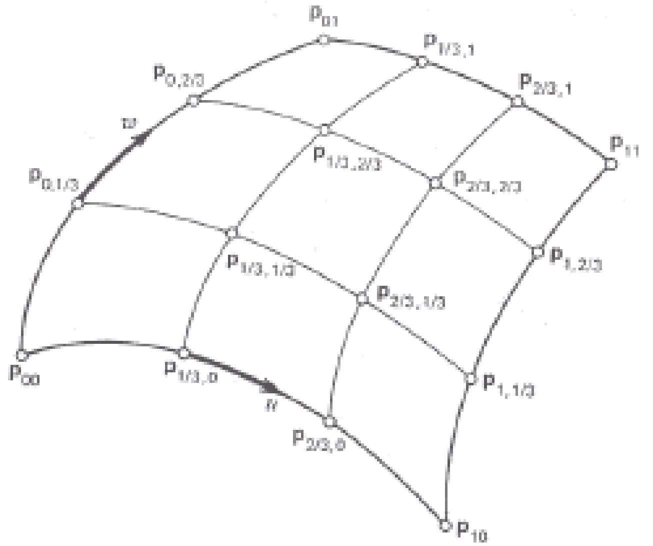
- Interpolation d'Hermite (suite):



  - La spécification des vecteurs de torsion par l'utilisateur n'est pas naturelle;
  - On peut imposer la formulation d'hypothèses particulières (continuité ou valeur nulle).

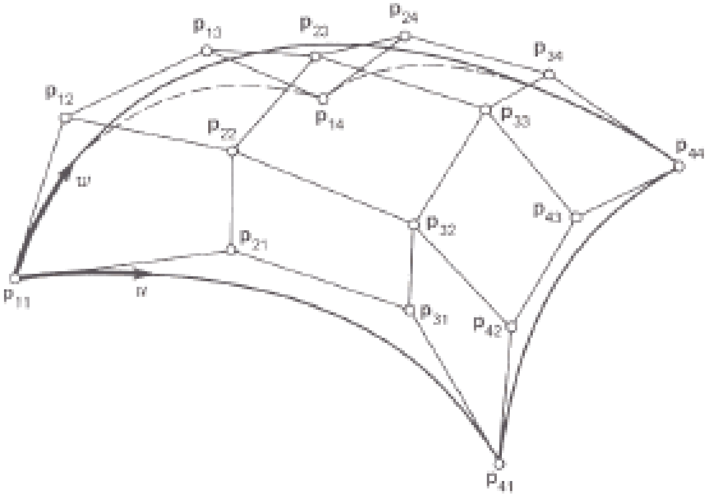
Interpolation de Lagrange

- Interpolation de Lagrange:
  - Pas toujours facile de connaitre tangentes et torsions;
  - 48 degrés de liberté pour définir surface:
    - 16 points 3D (*x*, *y*, *z*);
  - Organiser les positions des points selon des ratios de 1/3 des paramètres;
  - Difficile de contrôler la continuité à la jonction de tels carreaux;
  - On utilisera donc les surfaces de Bézier.



Surfaces de Bézier

- Les surfaces de Bézier sont l'équivalent des courbes de Bézier au niveau des surfaces;
- Elles utilisent un ***polyèdre caractéristique***, aussi appelé ***maillage caractéristique***;
- La surface passe par les points de coin du polyèdre;
- Les arêtes extérieures de la surface sont tangentes aux segments de droites formant les coins du polyèdre caractéristique.



1985
جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Surfaces de Bézier

- Formulation mathématique:
  - (n+1) points de contrôle selon u : polynôme de degré n en u;
  - (m+1) points de contrôle selon v : polynôme de degré m en v;

$$\vec{\mathbf{P}}(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\vec{\mathbf{P}}_{ij}B_{i,n}(u)B_{j,m}(v) \quad \text{avec } u,v\in[0,1]$$

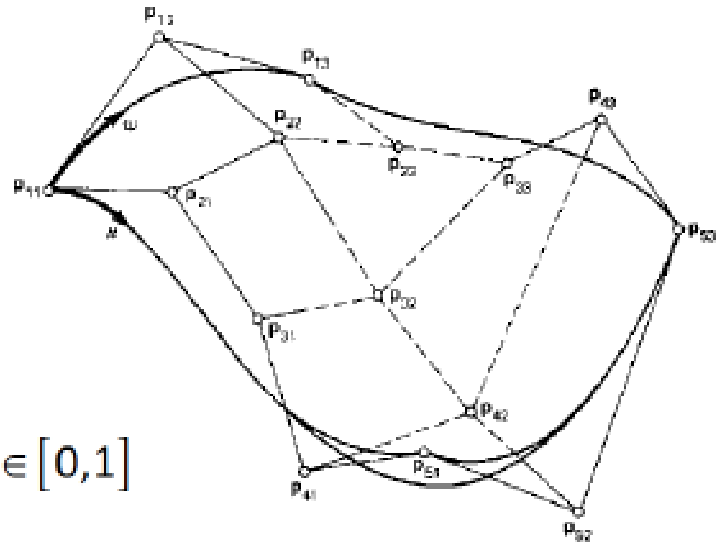


Figure 8.3 5 × 3 Bézier patch.

- $\mathbf{P}_{ij}$: coordonnees (x,y,z) des sommets du polyèdre caractéristique;
- Les fonctions d'influence $B_{i,n}(u)$ et $B_{j,m}(v)$ sont définies par :

$$B_{i,n}(u)=\frac{n!}{i!(n-i)!}u^{i}(1-u)^{n-i} \qquad B_{j,m}(v)=\frac{m!}{j!(m-j)!}v^{j}(1-v)^{m-j}$$

Surfaces de Bézier

- Continuité entre des carreaux de Bézier
  - Pour continuité G^1 à la frontière des carreaux, les points adjacents doivent être colinéaires:

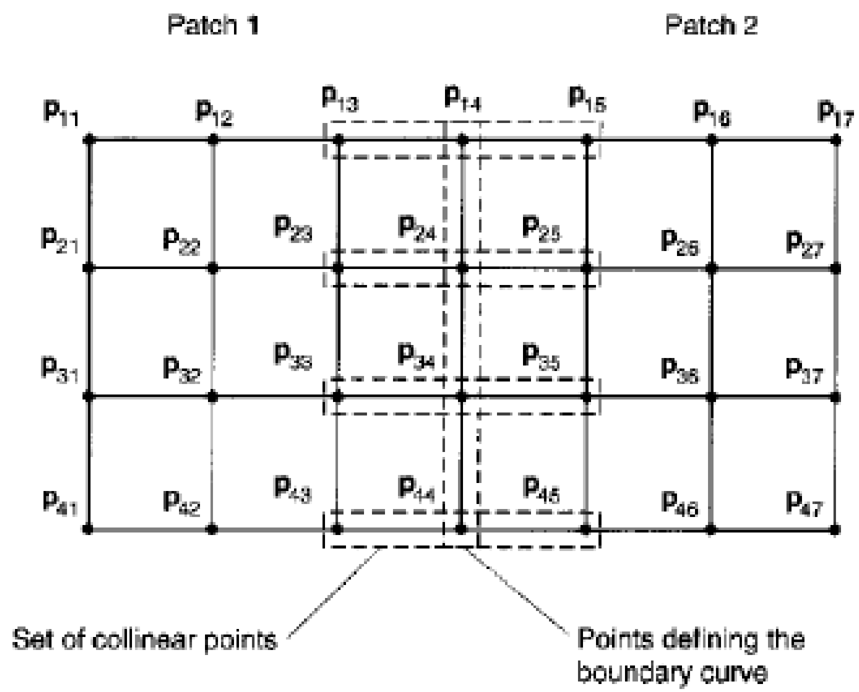


Figure 8.4 G^1 continuity across two Bézier patches.

Surfaces B-spline

- Surface approximative construite par l'assemblage de plusieurs carreaux de surfaces, donc à ***variation locale***;
- Pas de limitation du nombre de points de contrôle;
- Le degré des courbes caractéristiques est indépendant du nombre de points de contrôle;
- Chaque carreau de la surface possède ses propres fonctions d'influence (*blending functions*), dont les valeurs sont non-nulles uniquement pour l'intervalle correspondant.