Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

Chapitre III. ANALYSE COMBINATOIRE

III.1 ARRANGEMENTS

On considère un ensemble E de n éléments (n fini) et soit une suite (une disposition) de p éléments choisis parmi les éléments de l'ensemble E.

Cette suite peut être ordonnée ou non selon qu'on tient compte de la position des éléments ou non.

Elle peut se faire avec ou sans répétition selon que l'on puisse utiliser le même élément plusieurs ou une seule fois.

Définition :
Soit E un ensemble contenant n éléments différents (n fini). On appelle arrangement sans répétition de p éléments ($0 \leq p \leq n$) toute suite ordonnée de p éléments différents choisis dans E.

Le nombre d'arrangements sans répétition est : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Remarque : l'ordre est important.

Exemple 1 :
Dans un club de 10 personnes, on veut choisir un comité qui comprend un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul est exclu. De combien de manière peut-on choisir ce comité ?

Puisqu'il y a des charges, chaque comité est un arrangement et comme le cumul est exclu alors se sont des arrangements sans répétition.

On a alors $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720$ comités possibles.

Exemple 2 :
On tire successivement sans remise 4 boules, d'une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 à 9.

Chaque résultat possible de cette expérience est une suite ordonnée de 4 éléments distincts de l'ensemble

E = {0, 1, 2, . . . , 9}

Donc le nombre de résultats possibles est $A_{10}^4 = 5040$

Définition :
Soit E un ensemble contenant n éléments différents (n fini). On appelle arrangement avec répétition de p éléments (p quelconque) toute suite ordonnée de p éléments quelconques de E.

Le nombre d'arrangements avec répétition est : $\bar{A}_n^p = n^p$

Exemple 3 :
On tire successivement avec remise 4 boules, d'une urne qui contient 10 boules numérotées de 0 a` 9.

Chaque résultat possible de cette expérience est une 4-liste de l'ensemble E = {0, 1, 2, . . . , 9}.

Donc le nombre de résultats possibles est :

$$\bar{A}_{10}^4 = 10^4$$

III.2 PERMUTATIONS

III.2.1 : Permutation simple

Définition :
On appelle permutation toute suite ordonnée des n éléments de l'ensemble E.

Remarque : Une permutation est donc un arrangement particulier où p = n (tous les éléments de E)

Le nombre de permutations différentes est : $P_n = n!$

Exemple 1 :
Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot DIPLOMES
n = 8 , le nombre de mots différents est : $N = P_8 = 8! = 40\,320$

Exemple 2 :
De combien de manières peut-on ranger, sur une étagère, 4 livres de maths, 3 livres de physiques et 2 livres de chimie ?
Il y a N = 9! = 362 880 manières différentes

III.2.2 Permutations avec réputation

Dans le cas où certains éléments de l'ensemble E sont identiques :
Soient n_1 éléments d'une certaine sorte, n_2 éléments d'une autre sorte, et ainsi de suite jusqu'à n_k éléments qui sont d'une sorte différente. Alors le nombre de permutations différentes est :

$$P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\dots.\,n_k!}$$

Exemple 1 :
Combien de mots peut-on former avec les lettres du mot STATISTIQUES
n = 12 , $n_1=3$ (3 S) , $n_2=3$ (3T) , $n_3 = 2$ (2I)

Le nombre de mots différents est :

$$P_{12}^{3,3,2} = \frac{12!}{3!\,3!\,2!} = 6652800$$

III.3 COMBINAISONS

III.3.1 : Combinaison sans répétition

Définition :
On appelle combinaison sans répétition de p éléments ($0 \leq p \leq n$) toute suite non ordonnée de p éléments différents choisis parmi les éléments de E.

Remarque : une combinaison est un arrangement dans lequel l'ordre ne compte pas.

Le nombre de combinaisons différentes est :

Probabilités et Statistiques

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Propriétés

$C_1^0 = 1$, $C_n^n = 1$, $C_n^p = C_n^{n-p}$, $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

III.3.2 : Combinaison avec répétition

Définition

On appelle combinaison avec répétitions de p éléments (p quelconque) toute suite non ordonnée de p éléments quelconques pris parmi les éléments de E.

$$K_n^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

Exemple 1 :

À partir d'un groupe de 5 hommes et de 7 femmes, combien de comités différents composés de 2 hommes et de 3 femmes peut-on former ?

Il n'y a pas ordre $C_5^2 C_7^3 = 10 * 35 = 350$ comités possibles

Exemple 2 :

On tire simultanément 6 boules, d'une urne qui contient 49 boules numérotées de 1 à 49 :

Chaque résultat possible de cette expérience est une suite non ordonnée de 6 éléments distincts de l'ensemble E = {1, 2, . . . , 49}.

Donc le nombre de résultats possibles est :

$$C_{49}^6 = 13983816$$

III.3.3 : Binôme de Newton

Soient a et b ∈ R, et n ∈ N

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$$

Exemple 1 :

1- $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 a^0 b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

2- $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 a^1 b^2 + C_3^3 a^0 b^2 = 1a^3 + 3a^2 b + 3a^1 b^2 + 1b^3$