# المحور الثاني: أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة

## 1– مقدمة:

### 1-1- تمهيد:

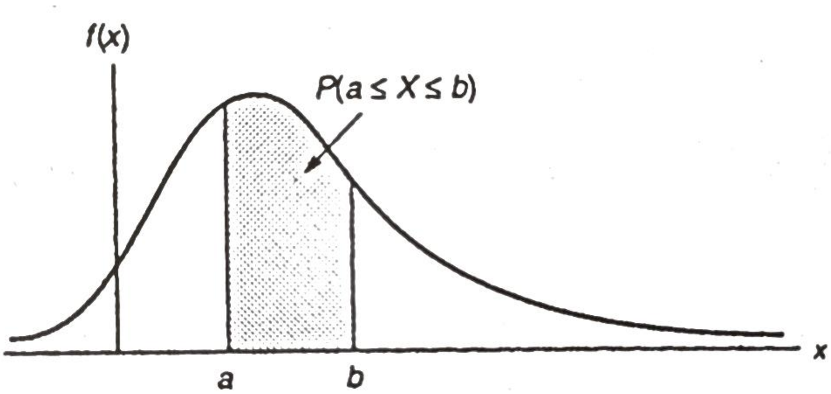
المتغير العشوائي المستمر (المتصل) يأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، ولذلك فإن توزيعه الاحتمالي سيمثل صيغة أو دالة مستمرة تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية تعطي هيئة التوزيع لذلك المجال المعين، بحيث أن خصائص دالة الكثافة والتي يرمز لها بالرمز $f(x)$:

$$f(x) \geq 0$$
$$\int f(x)dx = 1$$

### 2-1- تذكير ببعض المفاهيم:

**أ- دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي مستمر (متصل)::**

وفقا للتمهيد السابق فإن احتمال أن $X$ تأخذ قيما في الفترة من $a$ إلى $b$، هو ذلك الجزء من المساحة الكلية تحت المنحنى البياني لـ $f(x)$ والمحدود من الأسفل بالمحور الأفقي ومن اليسار واليمين بالقيم من $a$ إلى $b$ على التوالي، هذه الفترة الاحتمالية تكتب كما يلي: $p(a \leq x \leq b)$ وهي موضحة في الشكل الموالي:




الاحتمال عبارة عن المساحة أسفل منحنى دالة كثافة الاحتمال، أي حساب الاحتمالات في حالة المتغير العشوائي المتصل يعني رياضيا حساب المساحة بواسطة التكامل أي: $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)dx$

**ب- دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر:**

هي دالة عددية نرمز لها بـ: $F(x)$، وهي معرفة كالتالي:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}$$

لدالة التوزيع الاحتمالية أهمية كبيرة بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر، حيث أننا نهتم في هذه الحالة باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة، ولحساب احتمال مجال من الأسهل التعويض في دالة التوزيع الاحتمالية بدلا من حساب التكامل في كل مرة، يتضح ذلك من القاعدة التالية: بفرض أن $a$ و $b$ نقطتان من مجال تعريف $X$، حيث $a > b$، لحساب احتمال أن تكون $X$ تنتمي للمجال $]a - b]$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

بما أن الاحتمال عند النقطة في المتغير العشوائي المستمر يساوي الصفر، فإننا نستنتج من ذلك أن:

الاشارتين $\leq$ و $<$ متكافئتان، وبالتالي:

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

**ج- الخصائص: التوقع الرياضي والتباين للمتغيرة العشوائية المستمرة**

**ج-1- التوقع الرياضي:** القيمة المتوقعة لمتغير عشوائي مستمر X هو متوسط قيمة X وتعرف كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

**ج-2- التباين والانحراف المعياري:** تباين المتغير العشوائي المتصل $X$ هو التوقع لمربع الفرق بين $X$ ومتوسطها $E(X)$ ويعطى بالصورة التالية:

$$V(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(E(X)\right)^2$$

أو بصيغة بديلة أخرى:

$$V(X)=E(X-E(X))^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(X-E(X))^2 f(x)dx$$

ويعرف الانحراف المعياري ويرمز له بالرمز $\sigma$ بأنه الجذر التربيعي لتباين $X$ أي أن:

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}$$

**مثال:** أثبت أن الدالة الآتية دالة احتمالية : $f(x)=\frac{1}{8}x \qquad 0\le x\le 4$

ثم أوجد : 1- $P(x<3) \qquad P(x>2)$

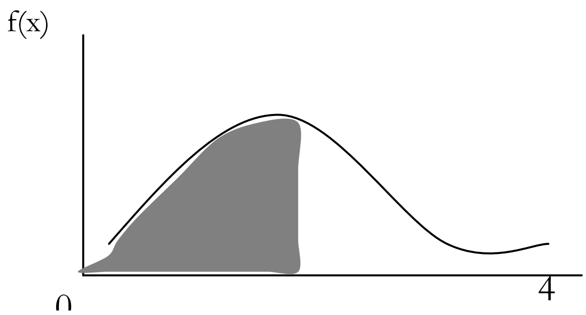
2- المتوسط والتباين والانحراف المعياري للتوزيع

الحل: لإثبات أن الدالة احتمالية لابد أن يكون تكاملها على المدى = 1 كما يلي :

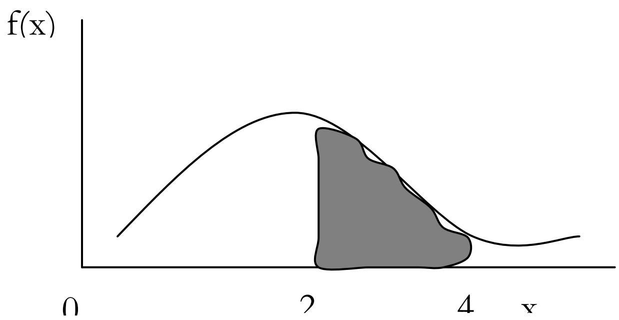
$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^4 \frac{1}{8}x\,dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{1}{8}\left(\frac{4^2}{2}-0\right)=\frac{1}{8}.\frac{16}{2}=1$$

1- حساب الاحتمالات:

$$P(x<3)=\int_0^3 \frac{1}{8}x\;dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$
$$=\frac{1}{16}(3^2)=\frac{9}{16}=.56$$

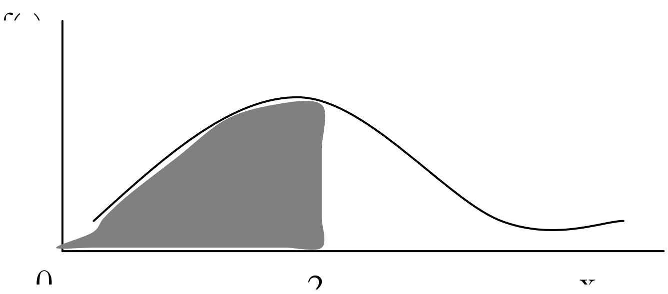



$$P(x>2)=\int_2^4 \frac{1}{8}x\;dx=\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$$
$$=\frac{1}{16}(4^2-2^2)$$
$$=\frac{1}{16}(16-4)=\frac{12}{16}=.75$$




<u>**حل آخر**</u>

$$P(x>2)=1-P(x<2)$$
$$=1-\int_0^2 \frac{1}{8}x\;dx=1-\frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$=1-\frac{4}{16}=\frac{12}{16}=.75$$



2-المتوسط

$$\mu = \int_R x f(x)dx = \int_0^4 x \frac{1}{8} x dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{1}{24}(4^3) = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$$

التباين

$$\sigma^2 = \int_R x^2 f(x)dx - \mu^2 = \int_0^4 x^2 \frac{1}{8}\ x\ dx - \left(\frac{8}{3}\right)^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^4 - \frac{64}{9} = \frac{256}{32} - \frac{64}{9} = 8 - \frac{64}{9} = \frac{72-64}{9} = \frac{8}{9}$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = .94$$

**2- التوزيع المنتظم (*loi uniforme*) :**

$X$ متغير عشوائي مستمر (متصل)، يأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، بحيث $(a < b)$ $x \in [a; b]$.

وتأخذ دالة كثافته الاحتمالية الشكل التالي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a; b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ونكتب: $X \backsim \mathbb{U}(a; b)$

أما التوقع الرياضي، التباين، والانحراف المعياري فيتم حسابهم كما يلي:

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

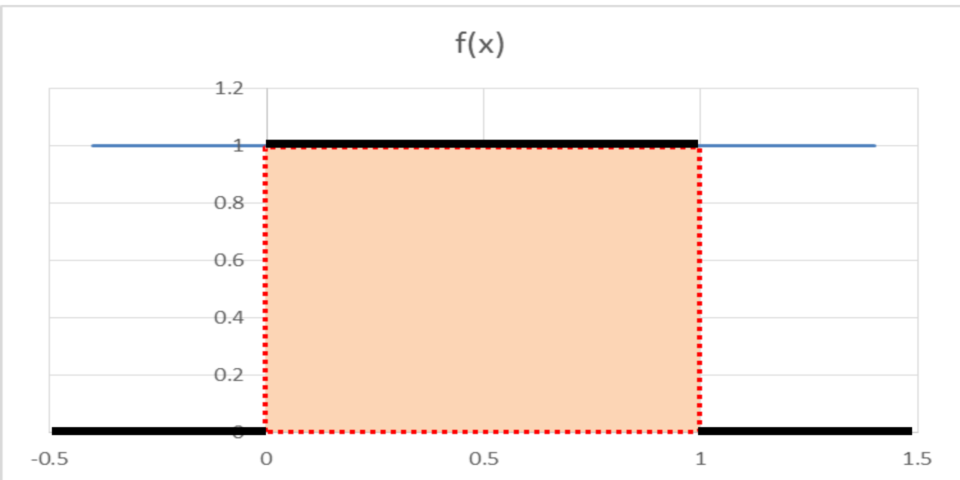
**مثال:** ليكن: $X \backsim \mathbb{U}(0; 1)$، أكتب دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ومثلها بيانيا، ثم أوجد ما يلي:

- دالة التوزيع $F(x)$ وتمثيلها البياني.
- الاحتمالات: $P\left(x < \frac{3}{4}\right)$، $P\left(\frac{1}{3} < x < \frac{3}{2}\right)$، $P\left(\frac{1}{4} < x < \frac{2}{3}\right)$.
- التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

**الحل:** بما أن $X$ يتبع التوزيع المنتظم $X \backsim \mathbb{U}(0; 1)$ فإن دالة كثافته الاحتمالية هي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [0; 1] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

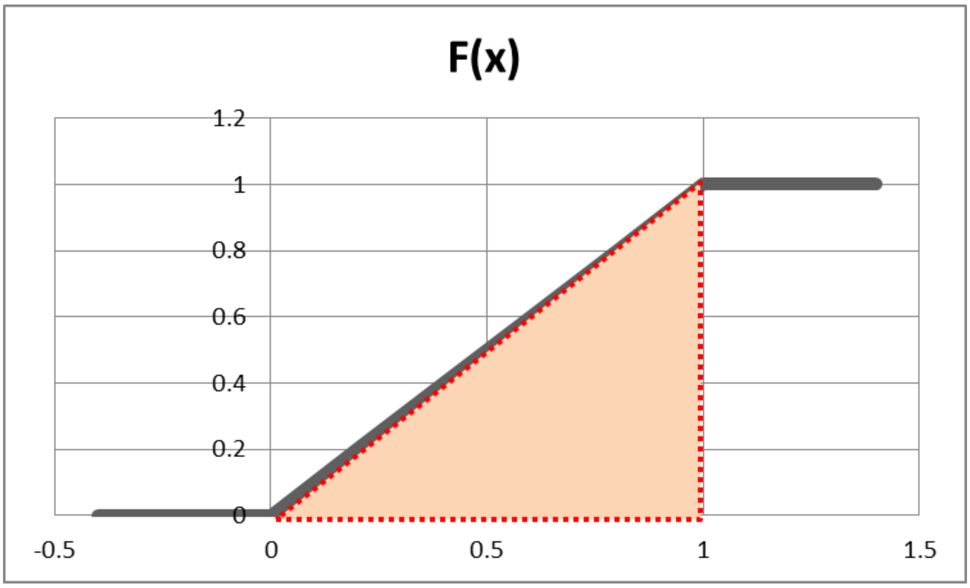
التمثيل البياني لدالة كثافة الاحتمال:



دالة التوزيع الاحتمالية هي:

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ x & si\ 0\leq x\leq 1\\ 1 & si\ x>1\end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$:




- حساب الاحتمالات:

$$P\left(x<\frac{3}{4}\right)=F\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$$
$$P\left(\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$P\left(\frac{1}{4}<x<\frac{2}{3}\right)=F\left(\frac{2}{3}\right)-F\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

- حساب التوقع والتباين والانحراف المعياري:

$$E(X)=\frac{b+a}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}=0.5$$
$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(1-0)^2}{12}=\frac{1}{12}=0.0833$$
$$\sigma=\sqrt{V(x)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=0.2887$$

**3- التوزيع الطبيعي:** نميز في هذا التوزيع بين قانونين، قانون التوزيع الطبيعي العام وقانون التوزيع الطبيعي المعياري.

**أ- القانون الطبيعي العام:** $\boldsymbol{X \sim \mathbb{N}(\mu,\sigma)}$

هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قمة واحدة، ويمتد طرفاه إلى $\infty$ ، وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأوزان – الأطوال – الأعمار ...الخ. تأخذ شكلاً قريبا من المنحنى الطبيعي.

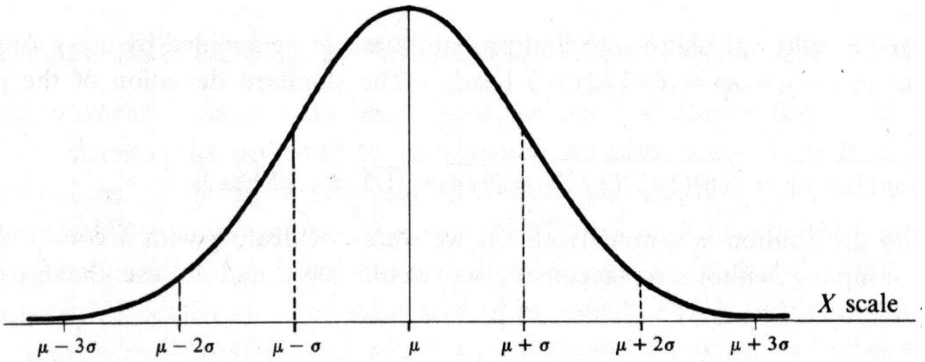
إذا كان $X$ متغير عشوائي مستمر (متصل) دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty\leq x\leq\infty$$

حيث : e : constant=2.718 ، π: constant=3.14 ، $\mu\in R$ ، $\sigma>0$

يقال إن $X$ يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ويكتب باختصار $X\sim\mathbb{N}(\mu,\sigma)$

- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي العام هو منحنى متناظر ، غير مفرطح وغير مدبب، كما يلي:




- دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ هي كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

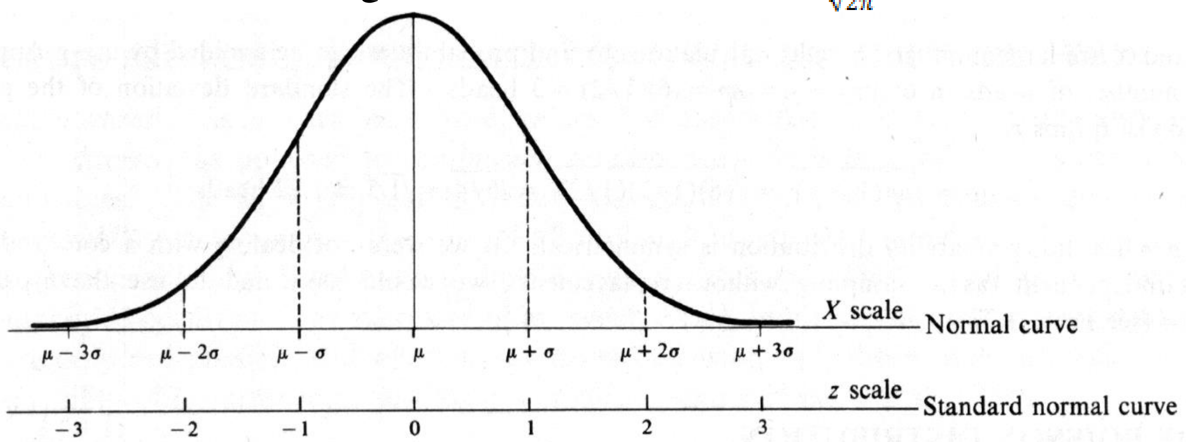
بحيث $f(x)$ تأخذ الصيغة السابقة، إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ $P(X \leq x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية.

- **ملاحظة:** من خلال ما سبق نلاحظ أن للقانون الطبيعي نفس خواص أي متغير عشوائي متصل، إلا أنه من الناحية التطبيقية وبالخصوص حساب الاحتمالات لا يمكن التطبيق المباشر لقواعد حساب المساحات، لأن صيغة دالة الكثافة الاحتمالية معقدة ويصعب مكاملتها، وعليه نلجأ إلى تبسيطها فنحصل على قانون آخر يدعى: القانون الطبيعي المعياري.

**ب- القانون الطبيعي المعياري (القياسي): $\mathbb{N}(0,1)$**

بوضع $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ في دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي العادي (أي في صورته العامة)، نجد أنه يتحول إلى توزيع طبيعي معياري، متوسطه $\mu = 0$ ، انحرافه المعياري $\sigma = 1$ ، ويكتب $Z \backsim \mathbb{N}(0,1)$.

وتصبح دالة كثافته الاحتمالية: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad -\infty \leq z \leq \infty$




وقد وضعت جداول توضح المساحة أسفل المنحنى (الاحتمال) وهذه الجداول [جدول (z)] تستخدم بشرط أن تكون المسألة في صورة توزيع طبيعي عادي $X$ أي: $\sigma \neq 1 \quad , \quad \mu \neq 0$ ونحولها إلى توزيع طبيعي معياري $Z$ أي: $\sigma = 1 \quad , \quad \mu = 0$ بالتحويلة: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

**مثال8:** إذا كان دخل (1000) أسرة في مدينة ما يتبع توزيع طبيعي متوسطه (μ) 1800 ون وانحرافه المعياري (σ) 300 ون .احسب احتمال الحصول على دخل:

1- أكبر من 2400 ون
2- أكبر من 1500 ون .
3- أقل من 2550 ون
4- أقل من 1200 ون

5- ينحصر بين 2250 و 1650 ون     6- ينحصر بين 2400 و 2550 ون .

7- أوجد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 1500 ون .

8- ما هو الدخل الذي أقل منه 97.72 % من المداخيل.

**الحل:** $X$ متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط $\mu = 1800$، وانحرافه المعياري $\sigma = 300$. نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي $Z$ بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-1800}{300}$

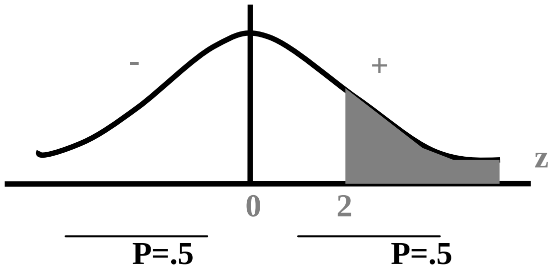
1- $P(x \geq 2400)$:

$x = 2400 \Rightarrow z = \frac{2400-1800}{300} = 2$

$P(x \geq 2400) = P(z \geq 2)$

$= P(z \leq -2) = 0.0228$

(من جدول Z)



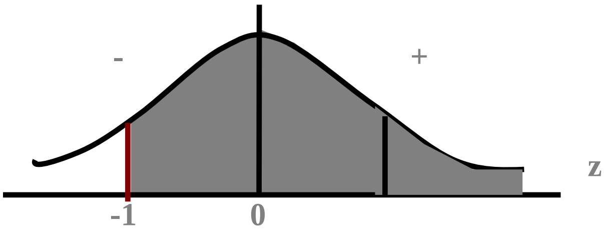

2- $P(x \geq 1500)$:

$x = 1500 \Rightarrow z = \frac{1500-1800}{300} = -1$

$P(x \geq 1500) = P(z \geq -1)$

$= P(z \leq 1) = 0.8413$

(من جدول Z)

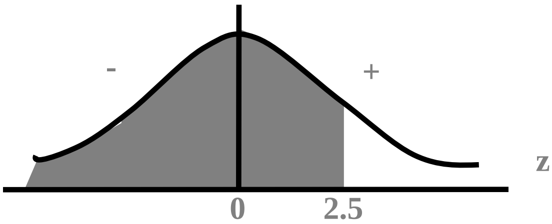



3- $P(x \leq 2550)$:

$x = 2550 \Rightarrow z = \frac{2550-1800}{300} = 2.5$

$P(x \leq 2550) = P(z \leq 2.5)$

$= 0.9938$

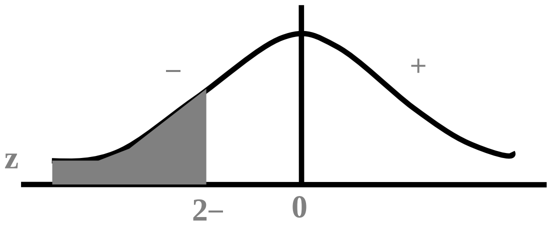



4- $P(x \leq 1200)$:

$x = 1200 \Rightarrow z = \frac{1200-1800}{300} = -2$

$= P(x \leq 1200) = P(z \leq -2)$

$= 0.0228$



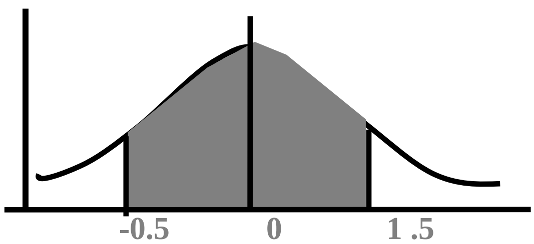

5- $P(1650 \leq x \leq 2250)$:

$P\left(\frac{1650-1800}{300} \leq z \leq \frac{2250-1800}{300}\right)$

$P(1650 \leq x \leq 2250) = P(-0.5 \leq z \leq 1.5)$

$P(z \leq 1.5) - P(z \leq -0.5)$

$= 0.9332 + 0.3085 = 0.6247$



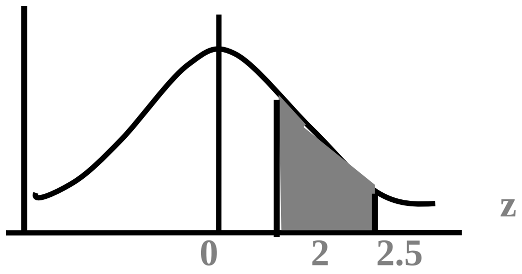
6- $P(2400 \le x \le 2550)$

$$P\left(\frac{2400-1800}{300} \le z \le \frac{2550-1800}{300}\right)$$

$$P(2400 \le x \le 2550) = P(2 \le z \le 2.5)$$

$$P(z \le 2.5) - P(z \le 2)$$

$$= 0.9938 - 0.9772 = 0.0166$$




7- عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 1500 ون = $P(X \ge 1500)$ × العدد الإجمالي للأسر

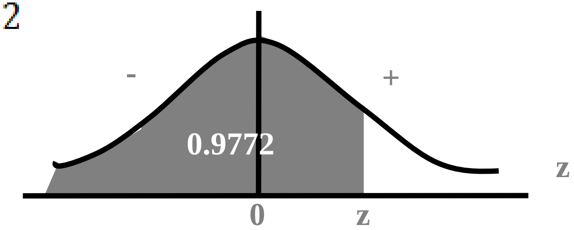
(من المطلوب 2) 0.8413 x 1000= 841.3 = 841 أسرة

8- الدخل الذي أقل منه 97.72% من المداخيل:

$$P(X \le x) = 0.9772 \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.9772$$

$$z = 2 \Leftrightarrow \frac{x-\mu}{\sigma} = 2 \Leftrightarrow \frac{x-1800}{300} = 2$$

$$\Rightarrow x = 600 + 1800 = 2400 \text{ ون}$$




**4- التوزيع الاسي:**

عادة ما يستخدم التوزيع الأسي في مسائل متعلقة بقياس الزمن. من ذلك مثلا مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، مدة تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة....الخ.

من الضروري فهم الآتي: كقاعدة عامة يستخدم التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما إذا كان لها متوسط ثابت $\frac{1}{\lambda}$ وكانت هذه الظاهرة لا تخضع للتقادم ، أي أن مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T ، أي لا تتأثر بالمدة التي دامتها الظاهرة من قبل، مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الأسي لتمثيل مدة حياة آلة عاملة قبل تعطلها لأن احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الآلة من قبل.

نشير أخيرا إلى أن للتوزيع الأسي علاقة بالتوزيع بواسون، فإذا كان وقوع أحداث ما يتبع هذا التوزيع، فإن المدة بين وقوع حدثين تتبع التوزيع الأسي؛ كمثال على ذلك، إذا كان وصول الزبائن إلى مركز خدمة ما يتبع التوزيع بواسون فإن المدة الزمنية بين وصول زبون "أ" والزبون الموالي تتبع التوزيع الأسي. تتبين هذه العلاقة عند استنتاج صيغة القانون الأسي.

لذلك يمكن القول إذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن، فإن الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع الأسي بالصيغة التالية:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

تأخذ دالة التوزيع F(x) الشكل التالي :

$$F(T) = P(T \le t) = \int_0^t f(t)dt$$

أي:

$$F(T) = 1 - e^{-\lambda t}$$

وله **الخصائص العددية** التالية:

التوقع (المتوسط): $\mu = E(T) = \frac{1}{\lambda}$

التباين: $E(T) = \frac{1}{\lambda^2}$

**مثال** : في معمل للمشروبات الغازية لوحظ أن معدل زمن انتظار الحصول على قنينة غير صالحة للتسويق هو 3 ثوان، حدد قانون التوزيع لهذا المتغير العشوائي، ثم احسب احتمال مرور أكثر من 4 ثوان دون ملاحظة قنينة غير صالحة، ثم احسب الخصائص.

**الحل:**

واضح أن المتغير العشوائي يتبع للتوزيع الاسي لأنه يمثل زمن الانتظار بين حادثين، وبمعدل 3 ($\mu = 3$)أي أن معلمة التوزيع

$$\mu = 1/\lambda \therefore 3 = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/3$$

وتكون دالة الكثافة الاحتمالية: $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$

- احتمال مرور أكثر من 4 ثوان دون ملاحظة قنينة غير صالحة:

$$P(t > 4) = \int_4^\infty \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}t}dt = \left[-e^{-\frac{1}{3}t}\right]_4^\infty = 0 + e^{-\frac{4}{3}} = 0.264$$

$$P(t > 4) = 1 - P(t < 4) = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{3}x4}) = 0.264$$

خصائص التوزيع :

التوقع (المتوسط): $\mu = E(T) = 3$

التباين: $E(T) = \frac{1}{3^2} = 9$

**مثال:** إذا كانت الفترة الزمنية لإنهاء خدمة الزبون في البنك تتبع توزيع أسي بمتوسط 2 دقيقة، فأوجد ما يلي:

-دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة الزبون.

-ما احتمال لإنهاء خدمة الزبون في أقل من دقيقة

**الحل:**

- دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية لإنهاء خدمة الزبون:

المتغير العشوائي يتبع للتوزيع الاسي لأنه يمثل زمن الانتظار بين حادثين، وبمعدل 2 ( $\mu = 2$ )أي أن معلمة التوزيع

$$\mu = 1/\lambda \therefore 2 = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/2 = 0.5$$

وتكون دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(t) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5t} & 0 < t < \infty \\ 0 & \sin on \end{cases}$$

- احتمال انهاء خدمة الزبون في أقل من دقيقة: $P(t < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}x1} = 0.3934$

خصائص التوزيع :

التوقع (المتوسط): $\mu = E(T) = 2$ التباين: $V(T) = \frac{1}{2^2} = 4$

**5- التوزيع قاما: Gamma**

يعد توزيع قاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام في بعض التطبيقات الإحصائية، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر، تقدير دالة المعولية، وتقدير دالة البقاء كما ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة، كالتوزيع الأسي مثلا، من جانب آخر يعالج توزيع قاما عادة المتغي ا رت العشوائية التي تكون قيمها موجبة دائما، والأمثلة على هذا النوع من المتغي ا رت كثيرة، نذكر منها مثلا : الفترة الزمنية المستغرقة بفحص مريض في إحدى العيادات الطبية، الفترة الزمنية بين وصول باخرتين متتاليتين لأحد الأرصفة وغيرها.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر (X)، يتوزع حسب التوزيع قاما فإن دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي تأخذ الشكل التالي:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}X^{\alpha-1}e^{\frac{-X}{\beta}} & X\geq 0\\ 0 & \sin on\end{cases}$$

حيث أن :

$\alpha$ و $\beta$ تثملان معلمات توزيع قاما و: $\beta,\alpha>0$

و $\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما و تأخذ دالة قاما ، الشكل التالي:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{\infty}X^{\alpha-1}e^{-X}\,d(X)$$

اختصارا يكتب بالاصطلاح الآتي : $X\rightarrow G(\alpha,\beta)$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد (n) عدد صحيح موجب، فإن دالة قاما تأخذ الشكل التالي:

$$\Gamma n=(n-1)!$$

ومن بعض الحالات الخاصة لدالة قاما: $\Gamma 1=1$ و $\Gamma 1/2=\pi=3.1415$

كما له **الخصائص** التالية:

التوقع (المتوسط): $\mu=\alpha.\beta$ التباين: $V(X)=\alpha.\beta^{2}$

مثال : إذا كان لديك المتغير العشوائي المستمر (X) يمثل الزمنية لعمل آلة انتاجية بالسنوات، وله دالة التوزيع الاحتمالي التالية:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{X}{4}e^{\frac{-X}{2}} & X\geq 0\\ 0 & \sin on\end{cases}$$

المطلوب:

-ما هو احتمال أن تستمر الآلة بالعمل مدة 10 سنوات أخرى على الأكثر ؟

-أحسب متوسط عمر الآلة والتباين.

**الحل:**

- احتمال أن تستمر الآلة بالعمل مدة 10 سنوات أخرى على الأكثر:

$$P(X\leq 10)=\int_{0}^{10}f(X)dx=\int_{0}^{10}\frac{X}{4}e^{\frac{-X}{2}}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{\frac{-X}{2}}(X+2)\right]_{0}^{10}$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{\frac{-10}{2}}(10+2)-(-\frac{1}{2}e^{\frac{-0}{2}}(0+2))\right]=\left[(-0.0404)-(-1))\right]=0.959$$

-متوسط عمر الآلة والتباين: التوقع (المتوسط): $\mu=\alpha.\beta=2x2=4$ التباين: $V(X)=\alpha.\beta^{2}=2x2^{2}=8$

**6- التوزيع بيتا:Beta**

يعد توزيع بيتا من التوزيعات الإحصائية المهمة على مستوى كثير من التطبيقات في الحياة العملية، ويستخدم بشكل واسع في دراسة سلوك بعض المتغيرات العشوائية، مثال ذلك :دراسة طبيعة البيانات المسجلة من قبل دائرة الأحوال الجوية والمتعلقة بنسب الرطوبة،أو دراسة معولية الأجهزة والمعدات.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر (X)، يتوزع حسب التوزيع بيتا فإن دالة التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي تأخذ الشكل التالي:

$$f(X)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha)+\beta}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}X^{\alpha-1}(1-X)^{\beta-1} & 0\le X\le 1\\ 0 & \sin on\end{cases}$$

اختصارا يكتب بالاصطلاح الآتي : $X\to\beta(\alpha,\beta)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بيتا بالمعلمتين $(\alpha),(\beta)$

كما له **الخصائص** التالية:

التوقع (المتوسط): $\mu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ التباين: $V(X)=\dfrac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

الانحراف المعياري : $\sigma(X)=\dfrac{1}{(\alpha+\beta)}\sqrt{\dfrac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta+1)}}$

مثال : إذا كان لديك المتغير العشوائي المستمر (X) يمثل نسبة الرطوبة في مدينة ما، وله دالة التوزيع الاحتمالي التالية:

$$f(X)=\begin{cases}30X^2(1-X)^2 & 0\le X\le 1\\ 0 & \sin\ on\end{cases}$$

المطلوب:

-ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة 40 % على الأكثر ؟

-ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة 30 % على الأقل ؟

-أحسب متوسط عمر الآلة والتباين و الانحراف المعياري.

**الحل:**

- احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة 40 % على الأكثر:

$$P(X\le 0.4)=\int_0^{0.4}f(X)dx=\int_0^{0.4}30X^2(1-X)^2\,dx=30\left[\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+\frac{X^5}{5})\right]$$
$$=30[(0.021)-0.013+0.002)]=0.3$$

- احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدينة 30 % على الأقل:

$$P(X\ge 0.3)=1-P(X\ge 0.3)=1-\int_0^{0.3}f(X)dx=1-(30\left[\frac{X^3}{3}-\frac{X^4}{4}+\frac{X^5}{5})\right])=1-(30[0.0054])=0.838$$

-أحسب متوسط عمر الآلة والتباين و الانحراف المعياري.

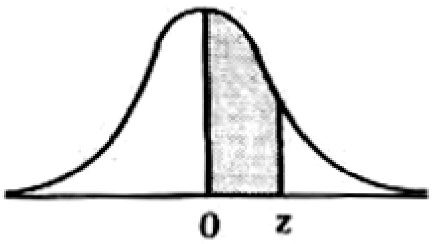
التوقع (المتوسط): $\mu=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}=\dfrac{3}{3+3}=1/2$ التباين: $V(X)=\dfrac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}=\dfrac{(3)(3)}{(3+3)^2(3+3+1)}=\dfrac{1}{28}=0.036$

الانحراف المعياري : $\sigma(X)=\dfrac{1}{(\alpha+\beta)}\sqrt{\dfrac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta+1)}}=\sqrt{0.36}=0.1897$

## ١ ـ جدول التوزيع الطبيعي القياسي

**Z~N(0, 1)**

**المساحة المظللة تمثل $P(0<Z<z)$**




Exemple : $\mu = 4,98$ $\sigma = 2$ $Xi = 10$ $Z = \frac{10-4,98}{2} = 2,51 = 0,4940$

| z | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .0000 | .0040 | .0080 | .0120 | .0160 | .0199 | .0239 | .0279 | .0319 | .0359 |
| 0.1 | .0398 | .0438 | .0478 | .0517 | .0557 | .0596 | .0636 | .0675 | .0714 | .0753 |
| 0.2 | .0793 | .0832 | .0871 | .0910 | .0948 | .0987 | .1026 | .1064 | .1103 | .1141 |
| 0.3 | .1179 | .1217 | .1255 | .1293 | .1331 | .1368 | .1406 | .1443 | .1480 | .1517 |
| 0.4 | .1554 | .1591 | .1628 | .1664 | .1700 | .1736 | .1772 | .1808 | .1844 | .1879 |
| 0.5 | .1915 | .1950 | .1985 | .2019 | .2054 | .2088 | .2123 | .2157 | .2190 | .2224 |
| 0.6 | .2257 | .2291 | .2324 | .2357 | .2389 | .2422 | .2454 | .2486 | .2517 | .2549 |
| 0.7 | .2580 | .2611 | .2642 | .2673 | .2703 | .2734 | .2764 | .2794 | .2823 | .2852 |
| 0.8 | .2881 | .2910 | .2939 | .2967 | .2995 | .3023 | .3051 | .3078 | .3106 | .3133 |
| 0.9 | .3159 | .3186 | .3212 | .3238 | .3264 | .3289 | .3315 | .3340 | .3365 | .3389 |
| 1.0 | .3413 | .3438 | .3461 | .3485 | .3508 | .3531 | .3554 | .3577 | .3599 | .3621 |
| 1.1 | .3643 | .3665 | .3686 | .3708 | .3729 | .3749 | .3770 | .3790 | .3810 | .3830 |
| 1.2 | .3849 | .3869 | .3888 | .3907 | .3925 | .3944 | .3962 | .3980 | .3997 | .4015 |
| 1.3 | .4032 | .4049 | .4066 | .4082 | .4099 | .4115 | .4131 | .4147 | .4162 | .4177 |
| 1.4 | .4192 | .4207 | .4222 | .4236 | .4251 | .4265 | .4279 | .4292 | .4306 | .4319 |
| 1.5 | .4332 | .4345 | .4357 | .4370 | .4382 | .4394 | .4406 | .4418 | .4429 | .4441 |
| 1.6 | .4452 | .4463 | .4474 | .4484 | .4495 | .4505 | .4515 | .4525 | .4535 | .4545 |
| 1.7 | .4554 | .4564 | .4573 | .4582 | .4591 | .4599 | .4608 | .4616 | .4625 | .4633 |
| 1.8 | .4641 | .4649 | .4656 | .4664 | .4671 | .4678 | .4686 | .4693 | .4699 | .4706 |
| 1.9 | .4713 | .4719 | .4726 | .4732 | .4738 | .4744 | .4750 | .4756 | .4761 | .4767 |
| 2.0 | .4772 | .4778 | .4783 | .4788 | .4793 | .4798 | .4803 | .4808 | .4812 | .4817 |
| 2.1 | .4821 | .4826 | .4830 | .4834 | .4838 | .4842 | .4846 | .4850 | .4854 | .4857 |
| 2.2 | .4861 | .4864 | .4868 | .4871 | .4875 | .4878 | .4881 | .4884 | .4887 | .4890 |
| 2.3 | .4893 | .4896 | .4898 | .4901 | .4904 | .4906 | .4909 | .4911 | .4913 | .4916 |
| 2.4 | .4918 | .4920 | .4922 | .4925 | .4927 | .4929 | .4931 | .4932 | .4934 | .4936 |
| 2.5 | .4938 | .4940 | .4941 | .4943 | .4945 | .4946 | .4948 | .4949 | .4951 | .4952 |
| 2.6 | .4953 | .4955 | .4956 | .4957 | .4959 | .4960 | .4961 | .4962 | .4963 | .4964 |
| 2.7 | .4965 | .4966 | .4967 | .4968 | .4969 | .4970 | .4971 | .4972 | .4973 | .4974 |
| 2.8 | .4974 | .4975 | .4976 | .4977 | .4977 | .4978 | .4979 | .4979 | .4980 | .4981 |
| 2.9 | .4981 | .4982 | .4982 | .4983 | .4984 | .4984 | .4985 | .4985 | .4986 | .4986 |
| 3.0 | .4987 | .4987 | .4987 | .4988 | .4988 | .4989 | .4989 | .4989 | .4990 | .4990 |
| 3.1 | .4990 | .4991 | .4991 | .4991 | .4992 | .4992 | .4992 | .4992 | .4993 | .4993 |
| 3.2 | .4993 | .4993 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4994 | .4995 | .4995 | .4995 |
| 3.3 | .4995 | .4995 | .4995 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4996 | .4997 |