Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

Chapitre IV : Introduction aux probabilités

IV.1 Définitions

IV.1.1. Expérience Aléatoire :

Définition : Une expérience aléatoire est toute expérience dont le résultat est régi par le hasard et si, répétée dans des conditions identiques, elle peut donner des résultats différents.

Exemples d'expériences aléatoires

1. Lancer un dé à 6 faces et observer le total
2. Jeter une pièce de monnaie.

IV.1.2. Univers

Définition : L'univers (espace échantillonnal) d'une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles de cette expérience, noté Ω .

Exemples : Les univers associés aux expériences aléatoires présentées dans l'exemple précédent sont respectivement :

1. Ω = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
2. Ω = [F, P]

IV.1.3. Événement

Définition : Un événement relié à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'univers Ω. On note habituellement les événements par A, B ,C, ...

• Un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.
• L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté ∅.
• L'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.

Exemple :

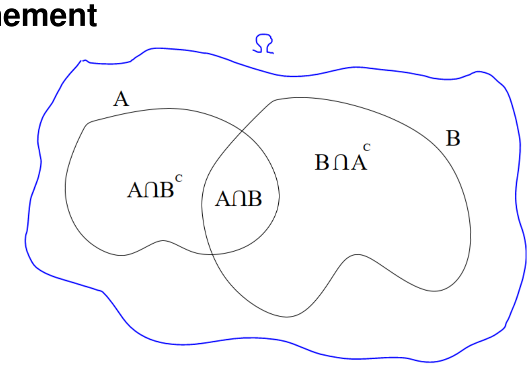
Lancer d'un dé à six faces :

• L'univers : Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
• Obtenir 2 est une éventualité de cette expérience aléatoire.
• A : « obtenir un 5 » est un événement élémentaire que l'on peut noter A = {5}.
• B : « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter B = {2, 4, 6}.
• Obtenir 7 est un événement impossible.
• Obtenir un nombre positif est un événement certain

Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

IV.2 Algèbre et événement



IV.2.1. Intersection et réunion

Définition : La réunion des deux ensembles A et B noté A ∪ B est l'ensemble constitué par les éléments de Ω appartenant à A ou à B. Autrement dit :

$A \cup B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$.

Définition : L'intersection des deux ensembles A et B noté A∩B est l'ensemble constitué par les éléments de Ω appartenant à A et à B. Autrement dit :

$A \cap B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$.

Remarque : Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que les événements A et B sont incompatibles (disjoints) ou sont des événements mutuellement exclusifs.

Exemple :

On considère l'ensemble constitué des chiffres de 1 à 10.

On note A l'événement « obtenir un chiffre pair » et B l'événement « obtenir un chiffre strictement inférieur à six ».

- A ∩ B : « obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six » $A \cap B = \{2, 4\}$.
- A ∪ B : « obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six » $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$.

IV.2.2. Le complémentaire

Définition : Le complémentaire de l'ensemble A noté $\bar{A}$ (ou A^c) est l'ensemble constitué des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Autrement dit :

$\bar{A} = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \notin A\}$.

Remarque : On a en particulier $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

IV.2.3. La différence symétrique

Définition : La différence symétrique des ensembles A et B noté A △ B est l'ensemble constitué par les éléments de Ω appartenant à A ∪ B et n'appartenant pas à A ∩ B. Autrement dit :

$A \triangle B = \{\omega \in \Omega \ / \ \omega \in A \cup B \text{ et } \omega \notin A \cap B\} = (A \cup B) - (A \cap B)$.

notations	vocabulaire ensembliste	vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	événement certain
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	sous-ensemble de Ω	événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω réalise A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	A et B
A^c ou $\overline{A}$	complémentaire de A	événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

IV.3 Espaces probabilistes

IV.3.1 Probabilité

Définition : La probabilité d'un événement est une valeur numérique qui représente la proportion de fois ou l'événement va se réaliser, quand on répète l'expérience dans des conditions identiques. On peut déduire de cette définition qu'une probabilité doit être entre 0 et 1 et que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités de chacun des événements élémentaires qui le constituent. Enfin, la somme des probabilités de tous les éléments de Ω est 1.

Remarque
Un événement n'est rien d'autre qu'une partie de Ω. Une probabilité associe à chaque événement un nombre entre 0 et 1. Il s'agit donc d'une application de l'ensemble des parties de Ω, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, dans [0, 1].

IV.3.2. L'ensemble des parties

Définition : L'ensemble des parties de Ω noté $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des sous-ensembles de Ω.

Exemple : Sur l'univers Ω = {a, b, c}, on a : $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \Omega\}$.

Remarque :
• $\mathcal{P}(\Omega)$ contient toujours ∅ et Ω.
• Les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont les sous-ensembles de Ω et non pas les éléments de Ω. En effet :
$$A \in \mathcal{P}(\Omega) \Longleftrightarrow A \subset \Omega.$$

IV.3.2. Espace probabilisable

Définition : On appelle espace probabilisable, le couple $(\Omega, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω.
Une probabilité sur l'univers Ω est une application P telle que :
1. P: $\mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$.
2. P(Ω) = 1.

Probabilités et Statistiques

3. La probabilité d'un événement de l'univers Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue. $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$

Remarque : On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité. Dans ce cas, on a :

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemple 1 :

Une urne contient 1 boule blanche et 1 boule noire. Si on fait le tirage 2 fois avec remise. Quelle est la probabilité d'avoir 2 Noires ?

On a Ω = {(N, N); (B, B); (B, N); (N, B)}. Card(Ω) = 4

Soit A est la possibilité d'avoir 2 boules Noires. Card(A) = {(N, N)}.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}.$$

Exemple 2 :

On choisit un jury de 3 personnes parmi 4 hommes et 6 femmes. Quelle est la probabilité que les 3 personnes choisies soient 2 hommes et 1 femme ?

Cas possibles Card(Ω) : $C_{10}^3 = \frac{10!}{3!*7!}$ = 120. Cas favorables Card(A) : $C_4^2 * C_6^1$= 36

$\Rightarrow$ P(A) = $\frac{36}{120}$ = 0.3

IV.3.2. Espace probabilisé

Définition : On appelle espace probabilisé, le triplé (Ω, $\mathbb{A}$, P), où A est une tribu de Ω et P une probabilité.

Propriétés

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- P(∅) = 0.
- P(Ω) = 1.
- 0 ≤ P(A) ≤1.
- P($\bar{A}$) = 1 – P(A).
- P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B).
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors P(A ∪ B) = P(A) + P(B).

Exemple : On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

A est l'événement « le nombre est multiple de 3 » : A = {3, 6, 9, 12, 15, 18}.

B est l'événement « le nombre est multiple de 2 » : B = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}.

Calcul des probabilités :

- P(A) = $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ = 0.3
- P($\bar{A}$) = 1 – P(A) = 1 – $\frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ =0.7
- P(B) = $\frac{10}{20}$ = 0.5

Probabilités et Statistiques

- $P(A \cap B) = \frac{3}{20} = 0.15$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{20} + \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = 0.65$