Solution de la Série N°3 (ondes et vibrations) 2023/2024

1

Exo1:

1- a) le régime est pseudo périodique (pseudo sinusoïdal)

b) Equation diff:

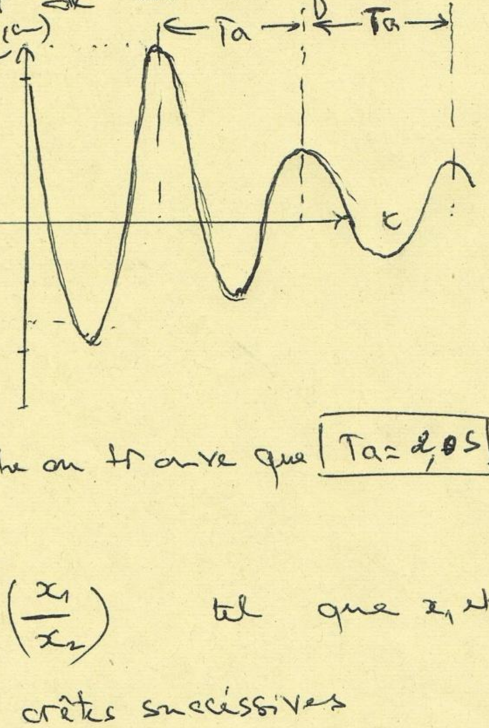
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec: $2\delta = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

δ = coeff d'amortissement

ω_0 = pulsation propre du syst non-amorti (c-à-d quand $\alpha = 0$)

2- valeur de T_a du graphe:



du graphe on trouve que $\boxed{T_a = 2,0\,s}$

3- $D = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ tel que x_1 et x_2 deux crêtes successives

toujours du graphe on trouve:

$$D = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{24}{4}\right) = \boxed{0,448}$$

on sait que : $D = \delta T_a \Rightarrow$

$$\delta = \frac{D}{T_a} = \frac{0,448}{2} = \boxed{0,224\,s^{-1}}$$

2

d'autre part nous avons:

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad \text{avec} \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

d'où : $\omega_a = \frac{2\pi}{T_a} = \boxed{\pi\, rad.s^{-1}}$

alors : $\omega_0^2 = \omega_a^2 + \delta^2 = \pi^2 + (0,224)^2$

finalement on trouve que

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \boxed{1,99\,s}$$

Exo2

1- $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boxed{0,28\,s}$ car

la période ne change pas dans le cas des frottements sec

2- on sait que les amplitudes diminuent linéairement selon

$$x_n = x_0 - n\left(\frac{2\mu m g}{k}\right)$$

c-à-d l'amplitude diminue chaque demi-période $\left(\frac{T_0}{2}\right)$ avec un pas fixe : $\frac{2\mu m g}{k}$.

x_n = valeur absolue des amplitude (positive et négati

le système s'arrête quand la force de rappel devient plus petite que la force de frotteme

c-à-d:

$k x_n \leq \mu m g \Rightarrow$

$n \geqslant \left(\frac{k}{2\mu m g}\right) x_0 - \frac{1}{2}$

on trouve que : $n \geqslant 6,85 \Rightarrow$

$n = 7$.

Donc le système s'arrête après avoir effectué 7 demi-périodes $\Rightarrow$

$$x_7 = x_0 - 7\left(\frac{2\mu m g}{k}\right) = \boxed{1,4.10^{-3}\,m}$$

3_ Distance parcourue par m :

$$d = x_0 + 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + x_7$$

$$= 14 x_0 - 49\,\frac{2\mu m g}{k} = \boxed{0,22\,m}$$

_ travail résistant de la force de frottement :

$$W(f_s) = -f_s \cdot d = -\mu m g\, d = \boxed{-0,11\,J}$$

4_ variation de U :

$$\Delta U = U(x_7) - U(x_0)$$

$$= \frac{1}{2}k(x_7^2 - x_0^2) = \boxed{-0,11\,J}$$

c-à-d :

$\Delta U = W(f_s) \Rightarrow$ L'énergie perdue par le système et transformée par f_f en chaleur.

Exo3 :

L'évolution dans le circuit RLC est régie par l'eq diff suivante :

$$\ddot{v}_C + 2\delta \dot{v}_C + \omega_0^2 v_C = 0$$

v_C : ddp aux bornes de C

avec : $2\delta = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

3 cas qui se présentent :

_ $\delta < \omega_0$ amortissement faible

$\Rightarrow$ régime pseudo-périodique

_ $\delta = \omega_0$ amortissement critique

$\Rightarrow$ régime critique apériodique

_ $\delta > \omega_0$ amortissement fort

Régime apériodique avec amortissement très long.

* Calcul de ω_0 :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{0,1.10^{-5}}} = \frac{1}{10^{-3}}$$

$$= \boxed{1000\,rad\,s^{-1}}$$

* Calcul de δ :

_ $R = 100\,\Omega \Rightarrow \delta = \boxed{500\,s^{-1}} < \omega_0$

_ $R = 150\,\Omega \Rightarrow \delta = \boxed{750\,s^{-1}} < \omega_0$

_ $R = 250\,\Omega \Rightarrow \delta = \boxed{1250\,s^{-1}} > \omega_0$

Donc:

$R = 100\,\Omega$ régime pseudo périodique

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \quad \text{avec : } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$= \boxed{866,0 \text{ rad.s}^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_a = 0,007\,s}$$

$R = 150\,\Omega$ régime pseudopériodique

$\omega_a = 661,4 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \boxed{T_a = 0,009\,s}$

2_ pour avoir le régime critique

il faut que : $\delta = \omega_0 \Rightarrow$

$$R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,1}{10^{-5}}} = \boxed{200\,\Omega}$$

EX04

I_ mvt non-amorti:

1\. Calcul de $U(\theta)$:

$$F_\theta = \frac{\delta W(\vec{P})}{\partial\theta} + \frac{\delta W(\vec{F_r})}{\partial\theta}$$

$$= \vec{P} \cdot \frac{\delta \vec{Om}}{\partial\theta} + \vec{F_r} \cdot \frac{\delta \vec{ON}}{\partial\theta}$$

N: pt d'application de $\vec{F_r}$. alors:

$$F_\theta = mg\vec{j}\,\frac{\delta}{\partial\theta}(l\cos\theta\,\vec{i} + l\sin\theta\,\vec{j}) - k(x+\Delta x)\vec{i}\,\frac{\delta}{\partial\theta}(-R\sin\theta\,\vec{i} - R\cos\theta\,\vec{j})$$

$$\Rightarrow F_\theta = (mgl + kR\Delta x - kR^2\sin\theta)\cos\theta$$

si $\theta \ll$ alors:

$$F_\theta \simeq (mgl + kR\Delta x - kR^2\theta)$$

d'où

$$F_\theta = -\frac{dU}{d\theta} \Rightarrow \frac{dU}{d\theta} = -(mgl + kR\Delta - kR^2\theta)$$

après intégration on trouve:

$$U(\theta) = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - (mgl + kR\Delta x)\theta + \overset{0}{U(0)}$$

avec un choix convenable de l'origine des potentiels:

$$U(\theta) = \frac{1}{2}kR^2\theta^2 - (mgl + kR\Delta x)\theta$$

à l'$\rightleftharpoons$ $(\theta = 0)$ on aurai:

$$\left.\frac{dU}{d\theta}\right|_{\theta=0} = 0 \Rightarrow mgl + kR\Delta x = 0$$

d'où: $\boxed{\Delta x = -\frac{mgl}{kR}}$

à l'$\rightleftharpoons$ le ressort est allongé vers les x négatifs de $|\Delta x| = \frac{mgl}{kR}$.

finalement:

$\boxed{U(\theta) = \frac{1}{2}kR^2\theta^2}$ forme quadratique

2\- Calcul de T:

$$T = \frac{1}{2}J_{disque}\,\dot\theta^2 + \frac{1}{2}J_m\,\dot\theta^2 = \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + ml^2\right)\dot\theta^2}$$

3\- alors: $\mathcal{L}(\theta,\dot\theta) = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + ml^2\right)\dot\theta^2 - \frac{1}{2}k$

après dérivation de l'eq de Lagrange on trouve:

$$\ddot\theta + \frac{kR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + ml^2}\theta = 0 \Rightarrow \text{mvt sinus}$$

de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{kR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + ml^2}}$

II_ mvt amorti: on prend $b = \frac{3}{4}l$

L'équation diff s'écrit:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} + \frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = 0$$

D: fct dissipation:

$$D = -\frac{1}{2}\frac{\delta W(\vec{f_f})}{\partial t} = \boxed{\frac{1}{2}\alpha b^2\dot\theta^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial D}{\partial\dot\theta} = \alpha b^2\dot\theta}$$

b: distance du pt d'application de $\vec{f_f}$ de O c-à-d

$$\frac{\delta W(\vec{f_f})}{\partial t} = \vec{f_f}\,\frac{\delta \vec{Oa}}{\partial t}$$

a : pt d'application de $\vec{f_f}$ $\Rightarrow$

$$\frac{\delta W(\vec{f_f})}{\partial t} = -\alpha\left(\frac{\delta \vec{Oa}}{\partial t}\right)^2$$

$$\vec{Oa} = b(-\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) \Rightarrow$$

$$\frac{\delta W(\vec{f_f})}{\partial t} = -\alpha b^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{D = \frac{1}{2}\alpha b^2 \dot{\theta}^2}$$

Donc on trouve finalement que :

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha b^2 \dot{\theta}$$

l'équa diff aura la forme suivante (après dérivation):

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha b^2}{\frac{1}{2}MR^2 + ml^2}\dot{\theta} + \frac{kR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + ml^2}\theta = 0$$

si on prend : $m = \frac{M}{8}$, $k = \frac{2mgl}{R^2}$ et

$R = l/2$ alors on aura :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{9\alpha}{4M}\dot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0}$$

par identification $\Rightarrow$

$$2\delta = \frac{9\alpha}{4M} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{9\alpha}{8M}}$$

$$w_0^2 = \frac{g}{2R} \Rightarrow \boxed{w_0 = \sqrt{\frac{g}{2R}}}$$

fin