المحور الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية

1) تمهيد:

في دراستنا للمحاور السابقة كنا نتطرق دائما للمتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد، ومنه التوزيعات الاحتمالية سواء المتقطعة أو المستمرة كانت أيضا ذات بعد واحد، ولكن في واقع الأمر تكون المشاهدات لبعض التجارب أو الدراسات تتطلب متغيرين أو أكثر، فمثلا عند دراسة التحصيل في مادة معينة يتطلب الامر علامتي الدروس والأعمال الموجهة، أو عند دراسة نمو الاطفال يتطلب الامر الطول والوزن...الخ

لذلك سنهتم في هذا المحور بدراسة هذا النوع من المتغيرات، وتقييم العلاقات الإحصائية لهذه المتغيرات، وسنركز بصفة خاصة على المتغيرات العشوائية ذات البعدين.

هذه المتغيرات تكون إما كمية مستمرة، أو نوعية متقطعة، أو تكون مختلطة، ومنه فعدد الاحتمالات الممكنة سيزداد بزيادة عدد المتغيرات العشوائية.

تعريف 1: ليكن S هو الفضاء العيني لتجربة ما، ولكل عدد حقيقي $x \in S$ نعرف $Y = Y(y),\ X = X(x)$ كمتغيرات عشوائية، فنقول للزوج المرتب (X, Y) متغير عشوائي ذو بعدين ويمكن تعميم هذا التعريف على المتغير العشوائي ذو البعد n.

تعريف 2: إذا كان المتغير العشوائي ذو البعدين (X, Y) له قيم قابلة للعد في اللانهاية فنقول عن المتغير (X, Y) والذي يأخذ القيم $\{(X_i; Y_j): i = 1,2, \dots n, \dots ; j == 1,2, \dots m \dots.\}$ بأنه متغير عشوائي منفصل ذو بعدين.

تعريف 3: إإذا كان المتغير العشوائي (X, Y) يشكل مجموعة غير منتهية في مجال التعريف، فإن المتغير (X, Y) متغير متصل.

2) الدوال الاحتمالية المشتركة:

1.2. الدالة الاحتمالية المشتركة المنفصلة:

ليكن (X, Y) متغير عشوائي منفصل ذو بعدين، فلكل نتيجة $(X_i; Y_j)$ يوجد احتمال $P(X_i; Y_j)$ بحيث نعرف لهذا الاحتمال على الصورة:

$$P(X_i; Y_j) = P(X = x_i; Y = y_j)$$

وهذا الاحتمال يحقق الشروط التالية:

a) $P(X_i; Y_j) \geq 0$
b) $\sum_i \sum_j P(X_i; Y_j) = 1$

فالدالة $P(X_i; Y_j)$المعرف بمنطقة $(X; Y)$لجميع قيم $(X_i; Y_j)$ بحيث $i = 1,2, \dots n, \dots; j = 1,2, \dots m$ تسمى الدالة الاحتمالية المشتركة، وإذا كان الحدث ß معرف في منطقة $(X; Y)$، بكل $\beta \in (X_i; Y_j)$ فإن:

$$P(\beta) = \sum_{\beta} \sum P(X_i; Y_j)$$

مثال:

إذا ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات وكان المتغير العشوائي x يشير إلى عدد الصور الظاهرة والمتغير العشوائي Y يشير إلى عدد مرات تغير المتغير، والمطلوب:

- إيجاد $P(X_i; Y_j)$
- احتمال الحدث ß الذي يمثل $\beta = (X > Y)$

الحل:

يمثل الجدول الموالي الفضاء العيني للتجربة وقيم كل من X و Y

Ω	ص ك ك	ص ص ك	ص ك ص	ص ص ص	ك ص ص	ك ك ص	ك ص ك	ك ك ك
X	1	2	2	3	2	1	1	0
Y	2	2	3	1	2	2	3	1

المقصود بالتغير مثلا : ص ص ص مقدار التغير 1 لأنها بقيت صورة في المحاولات الثلاث، ص ك ك التغير عدده 2 لأنها كانت صورة ثم تغيرت إلى كتابة، ثم بقيت كتابة، أما ك ص ك فالتغير هو 3 لأنها كانت تابة ثم اصبحت صورة ثم تغيرت إلى كتابة، والجدول الموالي يمثل قيم كل من X و Y وما يقابلها م احتمالات:

Y \ X	0	1	2	3
1	1/8	0	0	1/8
2	0	2/8	2/8	0
3	0	1/8	1/8	0

a) $P(1;2) = P(x = 1; y = 2) = \frac{2}{8}$

b) $P(\beta) = P(2;1) + P(3;1) + P(3;2) = 0 + \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}$

مثال:

كيس به N كرة، من بينها عدد k من الكرات الحمراء.، و b من الكرات البيضاء، وعدد s من الكرات السوداء، سحبت من الكيس n كرة بدون إرجاع، فإذا كان عدد الكرات الحمراء المسحوبة هو x وكان عدد الكرات البيضاء المسحوبة هو y، أوجد الدالة الاحتمالية المشتركة.

الحل:

عدد الكرات في الكيس هو N=k+b+s ولو لم يكن هناك شرط معين لكان الاختيارات هو $\frac{n}{N}$ لكن العدد n يشمل x عدد الكرات الحمراء و y عدد الكرات البيضاء، و n−x−y عدد الكرات السوداء، ويكون عدد الاختيارات هو $C_k^x C_b^y C_s^{n-x-y}$ وعليه فإن:

$$P(X_i;Y_j) = P(X = x_i; Y = y_j) = \begin{cases} \dfrac{C_k^x C_b^y C_s^{n-x-y}}{C_N^n} & x + y \leq n \\ 0 & \text{لقيم } y,x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

2.2. دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة المتصلة:

إذا كان المتغير العشوائي المتصل (X, Y) معرف على منطقة التعريف R فالدالة f(X, Y) التي تحقق الشروط التالية:

a) $"f(x;y) \geq 0 \qquad (x,y \in R$

b) $\iint_R (x,y)dxdy = 1$

تسمى دالة كثافة احتمالية مشتركة، فإذا كانت B هي منطقة تعريف (X, Y) فإن:

$$P(B) = \iint_B (x,y)dxdy$$

مثال:

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغير العشوائي معطاة بالعلاقة التالية:

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xy}{3} & 0<x<1;\ \ 0<y<2\\ 0 & \text{لقيم } x,y \text{ الأخرى}\end{cases}$$

وإذا كان الحادث $B=(x+y\geq 1)$ أوجد $P(B)$

الحل:

للدالة المعطاة فإن:

$$P(B)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^2+\frac{xy}{3}\right)dxdy\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y}{3}\right]_0^1dy=\int_0^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y\right)dy$$
$$=\left[\frac{y}{3}+\frac{y^2}{12}\right]_0^2=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

3) دالة التوزيع المشتركة:

إذا كان (X, Y) متغير عشوائي منفصل و $P(x;y)$ هي الدالة الاحتمالية المشتركة، فالدالة المعرفة على النحو التالي:

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)=\sum_{n\leq x}\sum_{m\leq y}P(n,m)$$

تسمى بالدالة التجميعية المشتركة.

أما إذا كان (X, Y) متغير عشوائي متصل فإن الدالة المعرفة على النحو التالي:

$$F(x,y)=P(X\leq x,Y\leq y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(t,z)dtdz$$

تسمى بدالة التوزيع التجميعية المشتركة.

وسواء كان المتغير العشوائي متصلا أو منفصلا فإنه يتمتع بالخواص التالية:

a) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = 0$

b) $F(-\infty, \infty) = 1$

c) $P(x_1 \leq X \leq x_2; Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y)$

$P(X < x; y_1 \leq Y \leq y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1)$

$P(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$

مثال:

إذا كان x,y متغيران عشوائيان متصلان ودالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لهما معطاة على النحو التالي:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & 0 < x < 2;\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{لقيم } y, x \text{ الأخرى} \end{cases}$$

بالاعتماد على دالة التوزيع المشتركة احسب $P(x \geq 1;\ 0.5 \leq Y \leq 0.7)$

الحل:

نجد أولا دالة التوزيع المشتركة.

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} tz dt dz = \int_{0}^{x} \frac{t^2}{2} zdz]_0^y = \int_{0}^{x} \frac{y^2 z}{2} dz = \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\Big]_0^x = \frac{y^2 x^2}{4}$$

وعليه تصبح دالة التوزيع على النحو التالي:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0; y < 0 \\ \dfrac{y^2 x^2}{4} & 0 \leq x \leq 2;\quad 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & x \geq 1; y \geq 1 \end{cases}$$

وعليه يمكن كتابة الاحتمال المطلوب بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} &P(x \geq 1;\ 0.5 \leq Y \leq 0.7) \\ &\qquad = P(x \leq 2; y \leq 0.7) - P(x \leq 2; y \leq 0.5) - P(x \leq 1; y \leq 0.7) \\ &\qquad + P(x \leq 1; y \leq 0.5) \end{aligned}$$

$$= \frac{4(0.7^2)}{4} - \frac{4(0.5^2)}{4} - \frac{1(0.7^2)}{4} + \frac{1(0.5^2)}{4} = \frac{3(0.7^2) - 3(0.5^2)}{4} = \frac{0.72}{4} = 0.18$$

4) دالة التوزيع الحدية ودالة الاحتمال الحدية:

لتكن f(X, Y) دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين x و y ، فأحيانا نهتم بدراسة دالة التوزيع الاحتمالي $f_1(x)$ للمتغير العشوائي x أو دالة التوزيع الاحتمالي $f_2(y)$ للمتغير العشوائي y، إن الدالتين السابقتين تشيران إلى الدالتين الحديتين أو الهامشيتين للمتغيرين العشوائيين x و y على التوالي.

ومن تعريف الدالة التوزيع التجميعية نستطيع أن نوجد دالة التوزيع الهامشية لكل من المتغيرين العشوائيين x و y .

مثال:

لتكن دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المتقطعين x و y على النحو التالي:

المجموع	3	2	1	x/y
0.7	0.2	0.2	0. 3	0
0.2	0.1	0.1	0.0	1
0.1	0.0	0.0	0.1	2
1	0.3	0.3	0.4	المجموع

أحسب دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية ودالة التوزيع التجميعية المشتركة للمتغيرين x و y .

الحل:

لحساب الدالة الهامشية:

$$f_1(0) = P(X = 0) = P(x = O, y = 1) + P(x = O, y = 2) + P(x = O, y = 3) = 0.3 + 0.2 + 0.2 = 0.7$$

$$f_1(1) = P(X = 1) = P(x = 1, y = 1) + P(x = 1, y = 2) + P(x = 1, y = 3) = 0.0 + 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$f_1(2) = P(X = 2) = P(x = 2, y = 1) + P(x = 2, y = 2) + P(x = 2, y = 3) = 0.1 + 0.0 + 0.0 = 0.1$$

وبنفس الأسلوب نجد:

$$f_2(1) = P(Y = 1) = P(x = O, y = 1) + P(x = 1, y = 1) + P(x = 2, y = 1) = 0.3 + 0.0 + 0.1 = 0.4$$

$$f_2(1) = P(Y = 2) = P(x = 0, y = 2) + P(x = 1, y = 2) + P(x = 2, y = 2) = 0.2 + 0.1 + 0.0 = 0.3$$

$$f_2(2) = P(Y = 3) = P(x = 0, y = 3) + P(x = 1, y = 3) + P(x = 2, y = 3) = 0.2 + 0.1 + 0.0 = 0.3$$

ولحساب دالة التوزيع التجميعية للدالتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ للمتغيرين x و y كما يلي:

x	0	1	2
$f_1(x)$	0.7	0.2	0.1
$F_1(x)$	0.7	0.9	1
y	1	2	3
$f_2(y)$	0.4	0.3	0.3
$F_2(y)$	0.4	0.7	1

من المثال السابق يمكن ان نضع التعريف التالي:

تعريف: ليكن x و y متغيرين عشوائيين متقطعين لهما دالة توزيع احتمالية مشتركة $f(x,y)$ في الفضاء R ، فإن دالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين X و Y هما:

$$f_1(x) = \sum_{y(x)} f(x,y) \quad ; \quad f_2(y) = \sum_{x(y)} f(x,y)$$

حيث أن $x, y \in R$

وحيث أن $\sum_{x(y)}$ تمثل مجموع القيم الممكنة بالنسبة إلى x المرتبطة مع قيم y المعطاة.

وأن $\sum_{y(x)}$ تمثل مجموع القيم الممكنة بالنسبة إلى y المرتبطة مع قيم x المعطاة.

وأن الدالتين التجميعيتين الهامشيتين بالنسبة إلى X و Y تعطى بالشكل:

$$F_1(x) = f(x,\infty) = \sum_{u\le x} f_1(u) \quad ; \quad F_2(y) = f(\infty,y) = \sum_{v\le y} f_2(v)$$

ملاحظة: يبدو لنا أن كل من الدالتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ ليستا دوال مزدوجة (ثنائية)، ولكن سميت بالدوال التوزيع الاحتمالي الهامشية (الحدية) لأنها اشتقت من الدالة الثنائية $f(x,y)$

وتعرف التوزيعات الهامشية في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة بنفس الطريقة ولكن باستبدال المجموع بعملية التكامل، ولهذا سنفرض الدالة $f(x,y)$ بأنها دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المستمرين x و y، وسوف نهتم بالاحتمال $P(a \le X \le b)$

نلاحظ ان $P(a \le X \le b) = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx$

عندما $_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$

وبنفس الأسلوب بالنسبة للدالة الهامشية $f_2(y)$

تعريف: ليكن المتغيرين العشوائيين المستمرين x و y لهما دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ في الفضاء R_{xy}، فإن دالتي التوزيع الاحتمالية الهامشية للمتغيرين x و y هما:

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \quad و \quad f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

حيث أن $,y \in R_{xy}$

وان الدالتين التجميعيتين الهامشيتين بالنسبة إلى x و y تعطى بالشكل:

$$F_2(y) = F(\infty,y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv \qquad و \qquad F_1(x) = F(x,\infty) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du$$

على التوالي

مثال:

لتكن دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين y,x على الشكل:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{81} & 0 < x < 3, \;\; 0 < y < 3 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالية الهامشية بالنسبة إلى x و y ، ثم اوجد دالتيهما التجميعيتين ودالة التوزيع التجميعية المشتركة.

الحل:

دوال التوزيع الهامشية هي:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^3 \frac{x^2y^2}{81}dy = \left.\frac{x^2y^3}{3*81}\right|_0^3 = \frac{x^2}{9}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{3} \frac{x^2y^2}{81}dx = \frac{x^3y^2}{3*81}\bigg|_0^3 = \frac{y^2}{9}$$

دوال التوزيع الهامشية هي:

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(u)du = \int_{0}^{x} \frac{u^2}{9}du = \frac{u^3}{3*9}\bigg|_0^x = \frac{x^3}{27} \quad 0 < x < 3$$

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv = \int_{0}^{y} \frac{v^2}{9}dv = \frac{v^3}{3*9}\bigg|_0^y = \frac{y^3}{27} \quad 0 < y < 3$$

نلاحظ ان:

$F_1(x) = \begin{cases} 1 & x > 3 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$ وكذلك ${}_2(y) = \begin{cases} 1 & y > 3 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$ وبذلك تكون دالة التوزيع التجميعية المشتركة للمتغيرين x و y هي:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu = \begin{cases} 0 & x < 0 \quad or \quad y < 0 \\ x^3y^3/729 & 0 < x < 3\,, 0 < y < 3 \\ x^3/27 & 0 < x < 3, \ \ y > 3 \\ y^3/27 & x > 3, 0 < y < 3 \\ 1 & x > 3, y > 3 \end{cases}$$

5) القيمة المتوقعة للدالة الاحتمالية المشتركة:

لتكن الدالة $h(x,y)$ هي دالة المشتركة للمتغيرين العشوائيين x و y ولتكن القيمة المتوقعة لهذه الدالة $E(x,y)$ فإذا كان المتغيران العشوائيان x و y متصلان فإن:

$$E[h(x,y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)f(x,y)dxdy$$

أما إذا كان المتغيران العشوائيان x و y منفصلان فإن:

$$E[h(x,y)] = \sum_i \sum_j h(x_i, y_j).P(x_i, y_j)$$

مثال:

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للمتغيرين العشوائيين المتصلين x و yمعطاة بالعلاقة التالية:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد $E(x+y)$; $E(xy)$

الحل:

بما أن المتغيرين العشوائيين متصلان، فإن

- $h(x,y) = xy$ وبتطبيق العلاقة السابقة فإن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي xy هي:

$$E[x.y] = \int_0^1 \int_0^1 xydxdy = \int_0^1 \frac{x^2}{2} ydy \Big|_0^1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} ydy = \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- $h(x,y) = x + y$

$$E[x+y] = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \frac{1}{2}y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

نظرية: إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغيرين العشوائيين (سواء كانا متصلين أو منفصلين)، هي على التوالي: E(x) E(y) فإن: E(x+y)=E(x)+E(Y)

6) التوزيع الشرطي الثنائي:

تم سابقا مناقشة مفهوم الاحتمال الشرطي لأي حدث A عندما يكون الحدث B معطى أو حاصل، فإذا كان المتغيرين العشوائيين x و y يقابلان الحدثين A و B على التوالي، فعندها يمكن الحديث عن دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية.

1.6. دالة التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغيرات العشوائية المتقطعة:

ليكن x و y متغيران عشوائيان متقطعان، لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$ ودالتي التوزيع الهامشيتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ على التوالي، حيث كلاهما دوال موجبة فإن:

$$P(X=x/Y=y)=\frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

نضع $g_1(x/y)=P(X=x/Y=y)$ بحيث أن:

$$g_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

حيث $f_2(y)>0$

فإن $g_1(x/y)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المتقطع x عندما يكون المتغير العشوائي المتقطع y معطى.

وبنفس الأسلوب نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المتقطع y عندما يكون المتغير العشوائي المتقطع x معطى وهي:

$$g_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

حيث $f_1(x)>0$

ونلاحظ أن كل من الدالتين $g_1(x/y)$ و $g_2(y/x)$ تحققان شروط دوال التوزيع الاحتمالي المتقطع وهي:

- $g_1(x/y)>0$ و $g_2(y/x)>0$
- $\sum_{\forall x} g_1(x/y)=\frac{\sum_{\forall x} f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f_2(y)}{f_2(y)}=1$

- $\sum_{\forall y} g_2(y/x) = \frac{\sum_{\forall y} f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1$

2.6. دالة التوزيع الاحتمالي الشرطي للمتغيرات العشوائية المتصلة:

ليكن x و y متغيران عشوائيان متصلان، لهما دالة التوزيع الاحتمالي المشتركة $f(x,y)$ ودالتي التوزيع الهامشيتين $f_1(x)$ و $f_2(y)$ على التوالي، حيث كلاهما دوال موجبة فإن:

$$g_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

حيث $f_2(y) > 0$

فإن $g_1(x/y)$ تسمى دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المتصل x عندما يكون المتغير العشوائي المتصل y معطى.

وبنفس الأسلوب نحصل على دالة التوزيع الاحتمالي الشرطية للمتغير العشوائي المتصل y عندما يكون المتغير العشوائي المتصل x معطى وهي:

$$g_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

حيث $f_1(x) > 0$

نلاحظ أن كل من الدالتين $g_1(x/y)$ و $g_2(y/x)$ تحققان شروط دوال الكثافة للتوزيع الاحتمالي المتقطع وهي:

- $g_1(x/y) > 0$ و $g_2(y/x) > 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x/y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)dx}{f_2(y)} = \frac{f_2(y)}{f_2(y)} = 1$
- $\int_{-\infty}^{\infty} g_2(y/x)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,y)dy}{f_1(x)} = \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1$

7) المتغيرات العشوائية المستقلة:

تعريف: نقول عن متغيرين عشوائيين (سواء كانا متصلين أو منفصلين) أنهما مستقلين إذا تحققت الشروط الكافية والموجبة التالية:

1. في حالة الاقترانات المتصلة:

$$f(x,y) = f_x(x).f_y(y)$$

لجميع قيم (x,y)

2. في الاقترانات المنفصلة:

$$P(x,y) = P_x(x).P_y(y)$$

لجميع قيم (x,y)

3. إذا كان $g_1(x)$ هو دالة في المتغير x و $g_2(y)$ هو دالة في المتغير y لجميع قيم $g_1(x)g_2(y)$ فإن:

$$E[g_1(x)g_2(y)] = E[g_1(x)].E[g_2(y)]$$

4. إذا كانت F(x,y) هي دالة التوزيع المشتركة وكانت $F_x(x)$ و $F_y(y)$ هما على الترتيب دالتي التوزيع الحديتين للمتغيرين x و y فإن:

$$F(x,y) = F_x(x).F_y(y)$$

لجميع قيم (x,y)

نظرية: إذا كان المتغيرين العشوائيين x و y مستقلين فإن:

$$E(xy) = E(x).E(y)$$

مثال:

لتكن دالة التوزيع التجميعية للمتغيرين العشوائيين المتصلين x و y، على الشكل التالي:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y)} & x,y \geq 0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

- احسب دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية للمتغيرين x و y.
- احسب دالة التوزيع التجميعية الهامشية للمتغيرين x و y.
- بين ما إذا كان المتغيرين x و y مستقلين أم لا؟

الحل:

من دالة التوزيع التجميعية $F(x,y)$ نحصل على دالة التوزيع الاحتمالية المشتركة $f(x,y)$ حيث:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x,y \geq 0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

وبذلك فإن دالة التوزيع الاحتمالي الهامشية تكون على الشكل:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

و

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases} e^{-y} & y \geq 0 \\ 0 & o/w \end{cases}$$

أما بالنسبة لدالة التوزيع التجميعية الهامشية فتكون كما يلي:

$$F_1(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x} f_1(u)du=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

و

$$F_2(y)=F(y,\infty)=\int_{-\infty}^{y} f_2(v)dv=\begin{cases} 0 & y<0 \\ 1-e^{-y} & y \geq 0 \end{cases}$$

ولدينا: $F_1(x)*F_2(y)=(1-e^{-x})(1-e^{-y})=1-e^{-y}-e^{-x}+e^{-(x+y)}$

$$F_1(x)*F_2(y)=F(x,y)$$

ومنه فالمتغيرين x و y مستقلين.

وهو ما يتأكد أيضا بالعلاقة:

$$f(x,y)=f_1(x).f_2(y)$$

8) معامل الارتباط:

نتطرق في هذه الفقرة إلى مقياس مهم من المقاييس التي توضح العلاقة بين المتغيرات العشوائية، وهذه العلاقة تسمى معامل الارتباط، وهو يوضح لنا مدى العلاقة الخطية بين المتغيرين العشوائيين المتصلين x و y، ولذلك سوف نقدم تعريفا لهذا المعامل ومن ثم الخصائص المرتبطة به.

تعريف: ليكن المتغيرين العشوائيين المتصلين x و y، معامل الارتباط بين هذين المتغيرين والذي نرمز له بالرمز p_{xy} يعطى بالعلاقة التالية:

$$p_{xy} = \frac{E\left[(x-\mu_x)\left(y-\mu_y\right)\right]}{\sqrt{V(x)V(y)}} = \frac{cov(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$$

حيث أن $cov(x,y)$ و $V(x)$ و $V(y)$ موجودة وأن $V(x) > 0$ و $V(y) > 0$

ويسمى أيضا بمعامل ارتباط بيرسون Pearson، ولدراسة هذا المقياس ومعرفة حقيقة ما يقيسه سنتطرق إلى بعض خواصه:

- إذا كان x و y متغيرين عشوائيين مستقلين فإن p=0، ويقال عن المتغيرين أنهما غير مرتبطين.
- لأي متغيرين عشوائيين متصلين x و y فإن معامل الارتباط إذا وجد تكون له قيمة بين -1 و $+1$، وبعبارة اخرى يكون $-1 \leq p \leq 1$.
- إذا كان x و y متغيرين عشوائيين، وأن $y = \propto + \beta x$، حيث أن $\propto$، β قيم حقيقية أن $\beta \neq 0$ ، فإن p=1 إذا كان $\beta > 0$ و $p=-1$ إذا كان $\beta < 0$، وهو ما يثبت بأنه إذا كانت هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرين فإن قيمة معامل الارتباط تكون ∓ 1 وأن العكس صحيح، فإذا كان معامل الارتباط هو ∓ 1، فإن العلاقة بين المتغيرين هي علاقة خطية.