Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

Chapitre V : Conditionnement et indépendance

V.1. Probabilité conditionnelle

Définition : Soient A et B deux événements telle que $P(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A relativement à B ou de A sachant B, la probabilité que l'événement A se réalise sachant que B est réalisé. Cette probabilité vaut

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Remarque : On trouve également la notation P(A/B) pour $P_B(A)$

Exemple : On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer un dé à 6 faces, équilibré. On suppose que toutes les faces sont équiprobables, et on définit les événements :

- A : « la face obtenue porte un numéro multiple de 3 ».
- B : « la face obtenue porte un numéro pair ».

Déterminons la probabilité d'obtenir un numéro multiple de 3, sachant qu'on a un numéro pair de deux manières différentes.

• L'événement (A/B) correspond à l'événement « obtenir un numéro multiple de 3 parmi les éventualités de B », autrement dit parmi {2, 4, 6}. Il n'y a donc que l'issue «obtenir 6» qui correspond. Ainsi, on obtient : $P_B(A) = \frac{1}{3}$

Par le calcul, on a : $P(B) = \frac{3}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Donc, d'après la formule :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = 0.33$$

Proposition 1 :
Pour tous événements A et B de probabilité non nulle, on a :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A) = P(A) \times P_A(B).$$

Proposition 2 :
Soit S un événement de probabilité non nulle, on a :

- $0 \leq P_S(A) \leq 1$.
- $P_S(\Omega) = 1$.
- $P_S(\emptyset) = 0$.
- $P_S(\bar{A}) = 1 - P_S(A)$.
- $P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B) - P_S(A \cap B)$.
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors

$$P_S(A \cup B) = P_S(A) + P_S(B).$$

- $P_S(\bar{A} \cap \bar{B}) = P_S(\overline{A \cup B}) = 1 - P_S(A \cup B)$.

Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

Théorème 1 : (*Formule des probabilités totales*) :

Pour tous A et B deux événements de probabilité non nulle :

$P(A) = P_B(A) \times P(B) + P_{\bar{B}}(A) \times P(\bar{B})$.

Théorème 2 : (*Théorème de Bayes*)

Pour tous A et B deux événements de probabilité non nulle :

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) * P(B)}{P(A)}$$

En fait, cette formule permet de calculer directement $P_A(B)$ sans passer par des étapes intermédiaires.

Exemple : Dans un atelier, deux machines M_1 et M_2 découpent des pièces métalliques identiques. M_1 fournit 60% de la production (parmi lesquelles 6, 3% sont défectueuses), le reste étant fourni par M_2 (dont 4% de la production est défectueuse).
La production du jour est constituée des pièces produites par les deux machines, et on en tire en fin de soirée une pièce au hasard (tous les prélèvements sont supposés équiprobables).

1. La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M_1 est : $P_{M_1}(D) = 0,063$.
2. La probabilité de prélever une pièce défectueuse, sachant qu'elle est produite par M2 est : $P_{M_2}(D) = 0,04$.
3. La probabilité de prélever une pièce défectueuse :

   En utilisant la formule des probabilités totales, on a

   $P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D)$

   $= P(M_1) \times P_{M1}(D) + P(M_2) \times P_{M2}(D)$

   $= 0,6 \times 0,063 + 0,4 \times 0,04$

   $= 0,0538$.
4. Si on prélève une pièce défectueuse, calculons la probabilité qu'elle soit produite par la machine M_1 :

En utilisant le théorème de Bayes, on a

$$P_D(M_1) = \frac{P_{M1}(D) * P(M_1)}{P(D)} = \frac{0.063 * 0.6}{0.0538} = 0.703$$

V.2. Événements indépendants

Définition : On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Exemple :

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée.

Probabilités et Statistiques

Soient les événements :

A : « Obtenir pile au premier lancé ».

B : « Obtenir pile au deuxième lancé ».

C : « Obtenir pile-face ou face-pile ».

Nous allons montrer que les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

On a : $\Omega = \{PP, PF, FP, FF\}$.

$P(A) = P(\{PP, PF\}) = 1/2$

$P(B) = P(\{PP, FP\}) = 1/2$

$P(C) = P(\{PF, FP\}) = 1/2$

$P(A \cap B) = P(\{PP\}) = 1/4 = P(A) \times P(B) \Rightarrow$ A et B sont indépendants.

$P(A \cap C) = P(\{PF\}) = 1/4 = P(A) \times P(C) \Rightarrow$ A et C sont indépendants.

$P(B \cap C) = P(\{FP\}) = 1/4 = P(B) \times P(C) \Rightarrow$ B et C sont indépendants.

$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \times P(B) \times P(C)$

$\Rightarrow$ A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Ainsi, les événements A, B et C sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

Proposition

Si A et B sont des événements indépendants, alors : A et $\bar{B}$; $\bar{A}$ et B ; $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont également des événements indépendants.