المحور الثاني

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تمهيد :

كما لاحظنا في المحور الأول، أن هناك توزيعات خاصة للمتغيرات العشوائية المتقطعة، فإننا سوف نستعرض في هذا المحور بعض التوزيعات الخاصة للمتغير العشوائي المتصل، والتي لها أهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية التي ستدرس في مراحل متقدمة.

وسنحاول إعطاء بعض الأمثلة التوضيحية لكل توزيع ليكون الطالب على دراية في طريقة التوصل إلى بعض الاشتقاقات المهمة، وليكون فكرة جيدة عن خصائص كل توزيع.

فيما يلي بعض التوزيعات للمتغير العشوائي المستمر، مع أهم الخصائص المتعلقة بكل توزيع :

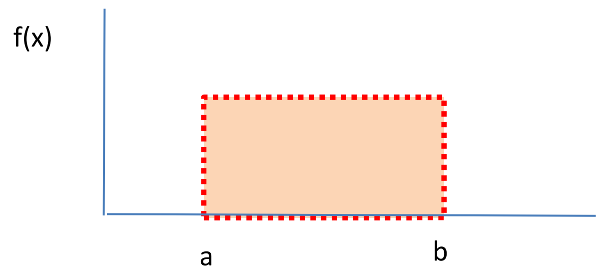
أولا : التوزيع المنتظم (Uniform distribution)

1- التعريف :

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم في حالة الظواهر التي يمكن أن تحدث بشكل منتظم، فإذا كان المتغير العشوائي المستمر X له توزيع منتظم، ويأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، بحيث $(a < b)$ $x \in [a;b]$ ، فإن دالة كثافة احتماله هي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si\ x \in [a;b] \\ 0 & sinon \end{cases}$$

ومن معالم التوزيع فإنه توجد معلمتان لهذا التوزيع هما (a, b) ولذا يكتب رمز هذا التوزيع بالصورة $X \backsim \mathbb{U}(a;b)$، ويسمى أحيانا بالتوزيع المستطيل، لأن يمثل بيانيا على شكل مستطيل كما يلي :



أما دالة التوزيع الاحتمالية F(x) (التراكمية) فتكتب بالصورة التالية :

$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \le x \le b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

2- الخصائص العددية للتوزيع المنتظم (المستمر) :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

مثال 01 : يتبع المتغير العشوائي X التوزيع المنتظم بالمعلمات $X \backsim \mathbb{U}(0;6)$ أوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال f(x) ثم دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير ؟

2- $P(2 \leq X \leq 5)$ ، $P(X \leq 4)$ ، $P(X > 3)$ ؟

3- التوقع والتباين والانحراف المعياري لهذا المتغير ؟

الحل :

1- أ إيجاد دالة كثافة الاحتمال f(x) لهذا المتغير:

X متغير عشوائي مستمر يأخذ المجال $[0;6]$ ويتبع التوزيع المنتظم، فتكون دالة كثافة احتماله على النحو التالي :

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{6-0} = \frac{1}{6} \qquad x \in [0;6]$$

1- ب دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير:

تعطى هذه الدالة وفق الصياغة التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الخاص بالمتغير العشوائي X، تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \dfrac{x}{6} & si \quad 0 \leq x \leq 6 \\ 1 & si \quad x > 12 \end{cases}$$

2- حساب :

$$*P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$*P(X \leq 4) = F(4) - F(0) = \frac{4}{6} - \frac{0}{6} = \frac{4}{6} = 0.66$$

$$*P(X > 3) = F(6) - F(3) = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = 0.5$$

3- حساب :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{b+a}{2} = \frac{6+0}{2} = 3$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6-0)^2}{12} = 6$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{6} = 2.44$$

مثال 2 : قطار يصل إلى المحطة الساعة الحادية عشر صباحا، فإذا كان وقت وصول القطار يتبع التوزيع المنتظم وكان النتغير العشوائي X الذي يعبر عن وقت وصول القطار يأخذ قيما بين 10:50 و 11:10 ، والمطلوب :

1- أوجد دالة كثافة الاحتمال f(x) ثم دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير ؟

2- أحسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة بعد 3 دقائق على الأكثر من الوقت المحدد له ؟

3- أحسب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة قبل 5 دقائق على الأقل من الوقت المحدد له ؟

الحل :

1- أ إيجاد دالة كثافة الاحتمال f(x) لهذا المتغير:

X متغير عشوائي مستمر يأخذ المجال $[10.50; 11.10]$ ويتبع التوزيع المنتظم، فتكون دالة كثافة احتماله على النحو التالي:

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{11.10 - 10.50} = \frac{1}{20} \qquad x \in [10.50; 11.10]$$

1- ب دالة التوزيع التراكمي F(x) لهذا المتغير:

تعطى هذه الدالة وفق الصياغة التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 1 & si \quad x > b \end{cases}$$

وبتعويض المدى الخاص بالمتغير العشوائي X، تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 10.50 \\ \dfrac{x-10.50}{20} & si \quad 10.50 \leq x \leq 11.10 \\ 1 & si \quad x > 11.10 \end{cases}$$

2- حساب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة بعد 3 دقائق على الأكثر من الوقت المحدد له :

بعد 3 دقائق من الوقت المحدد معناه 11.03 أي أن الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \leq 11.03) = F(11.03) - F(10.50) = \frac{11.03-10.50}{20} - \frac{10.50-10.50}{20} = \frac{13}{20} = 0.65$$

3- حساب احتمال أن يصل القطار إلى المحطة قبل 5 دقائق على الأقل من الوقت المحدد له :

قبل 5 دقائق من الوقت المحدد معناه 10.55 أي أن الاحتمال المطلوب هو :

$$P(X \geq 10.55) = F(11.10) - F(10.55) = \frac{11.10-10.50}{20} - \frac{10.55-10.50}{20} = \frac{20}{20} - \frac{5}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0.75$$

ثانيا : التوزيع الطبيعي (Normal distribution)

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها استعمالا على الإطلاق، بل إنه يحتل موضع الصدارة في الاحتمالات والإحصاء، وقد اشتق اسمه من أن كثيرا من التوزيعات " الطبيعية " تأخذ شكلا قريبا منه، كذلك فإن معظم التوزيعات البيومترية (كتوزيعات الطول والوزن) وتوزيعات أخطاء المشاهدات (الفروق بين القيم الحقيقية والقيم المشاهدة) تأخذ شكلا قريبا منه، ويستخدم هذا التوزيع في كثير من التجارب الصناعية واختبارات الجودة وله استخدامات واسعة في اختبارات الفروض والعينات الكبيرة وتوزيعات المعاينة وغيرها .

نميز في هذا التوزيع بين قانونين، قانون التوزيع الطبيعي العام وقانون التوزيع الطبيعي المعياري.

1- القانون الطبيعي العام : $X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$

التعريف : هو توزيع مستمر يأخذ شكل منحنى متماثل ذو قمة واحدة، ويمتد طرفاه إلى ∞ ، وقد وجد أن معظم التوزيعات مثل الأوزان – الأطوال – الأعمار ...الخ. تأخذ شكلاً قريبا من المنحنى الطبيعي.

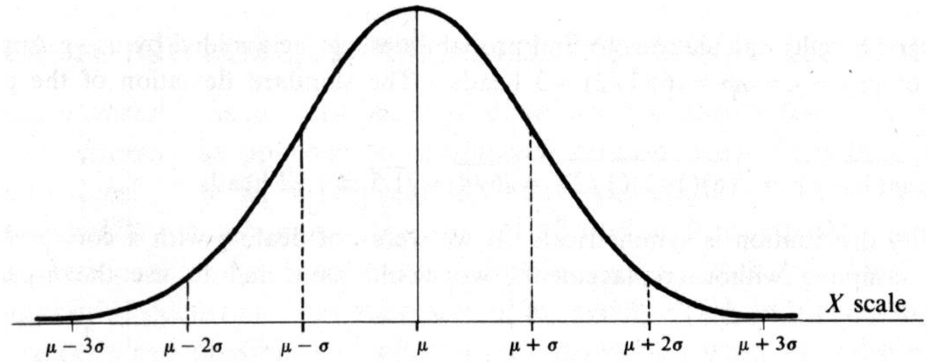
إذا كان X متغير عشوائي مستمر (متصل) دالة كثافته الاحتمالية هي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty \leq x \leq \infty$$

حيث : e : constant=2.718 ، π: constant=3.14 ، $\mu \in R$ ، $\sigma > 0$

يقال إن X يتبع توزيع طبيعي عادي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ ويكتب باختصار $X \sim \mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$

- التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي العام هو منحنى متناظر ، غير مفرطح وغير مدبب، كما يلي:



- دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ هي كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

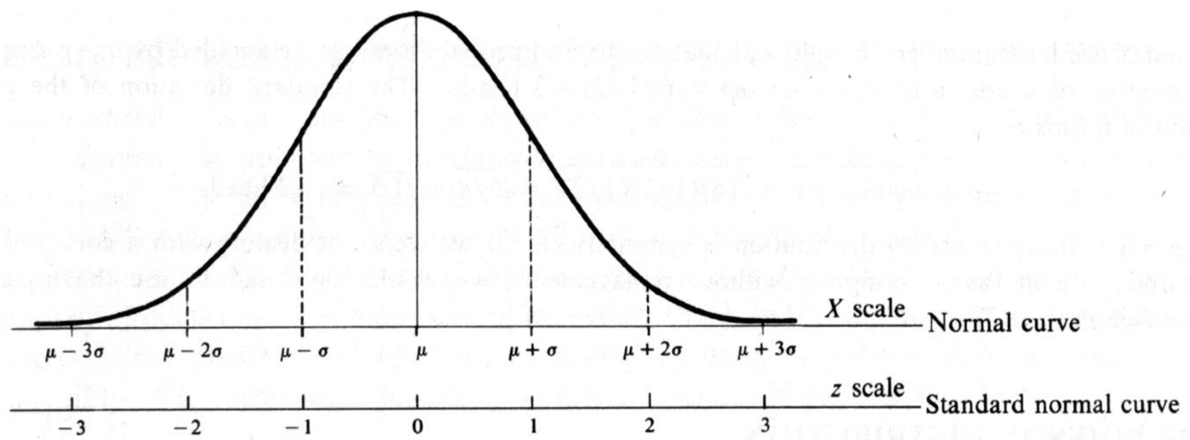
بحيث $f(x)$ تأخذ الصيغة السابقة، إذن لحساب $F(x)$ يجب مكاملة دالة الكثافة الاحتمالية (حساب الدالة الأصلية)، ثم حساب المساحة المكافئة لـ $P(X \leq x)$، إلا أن الحساب عمليا لا يتم كذلك نظرا للشكل المعقد لدالة الكثافة الاحتمالية، أين يصعب حساب الدالة الأصلية لها، فنلجأ إلى تحويل رياضي لتبسيط صيغة دالة الكثافة الاحتمالية.

- **ملاحظة:** من خلال ما سبق نلاحظ أن للقانون الطبيعي نفس خواص أي متغير عشوائي متصل، إلا أنه من الناحية التطبيقية وبالخصوص حساب الاحتمالات لا يمكن التطبيق المباشر لقواعد حساب المساحات، لأن صيغة دالة الكثافة الاحتمالية معقدة ويصعب مكاملتها، وعليه نلجأ إلى تبسيطها فنحصل على قانون آخر يدعى : القانون الطبيعي المعياري.

2- القانون الطبيعي المعياري (القياسي): $\mathbb{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

التعريف : بوضع $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ في دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي العادي (أي في صورته العامة)، نجد أنه يتحول إلى توزيع طبيعي معياري، متوسطه $\mu = 0$ ، انحرافه المعياري $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{1}$ ، ويكتب $Z \sim \mathbb{N}(0,1)$.

وتصبح دالة كثافته الاحتمالية: $-\infty \leq z \leq \infty$ $\quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$



وقد وضعت جداول توضح المساحة أسفل المنحنى (الاحتمال) وهذه الجداول [جدول (z)] تستخدم بشرط أن تكون المسألة في صورة توزيع طبيعي عادي X أي: $\mu \neq 0 \quad , \quad \sigma \neq 1$ ونحولها إلى توزيع طبيعي معياري Z أي: $\mu = 0 \quad , \quad \sigma = 1$ بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

مثال 02 :

من خلال جدول التوزيع الطبيعي القياسي أوجد الاحتمالات التالية :

1- $P(0 < z < 2)$ 2- $P(0 < z < 1.55)$ 3- $P(-3.31 < z < 0)$ 4- $P(z < 2)$ 5- $P(z < 2.58)$

6- $P(z > 2)$ 7- $P(z > -1.53)$ 8- $P(z > -3.14)$ 9- $P(-2 < z < 2)$ 10- $P(-1.66 < z < 3.25)$

11- $P(1.5 < z < 2.65)$ 12- $P(-2.4 < z < -1.49)$ 13- $P(|z-2| \leq 0.82)$

الحل:

1- $P(0 < z < 2) = 0.4772$

2- $P(0 < z < 1.55) = 0.4394$

3- $P(-3.31 < z < 0) = 0.4995$

4- $P(z < 2) = 0.5 + P(0 < z < 2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

5- $P(z < 2.58) = 0.5 + P(0 < z < 2.58) = 0.5 + 0.4951 = 09951$

6- $P(z > 2) = 0.5 - P(0 < z < 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

7- $P(z > -1.53) = 0.5 + P(-1.53 < z < 0) = 0.5 + 0.4394 = 0.9394$

8- $P(z > -3.14) = 0.5 + P(-3.14 < z < 0) = 0.5 + 0.4992 = 0.9992$

9- $P(-2 < z < 2) = P(-2 < z < 0) + P(0 < z < 2) = 0.4772 + 0.4772 = 0.9544$

10- $P(-1.66 < z < 3.25) = P(-1.66 < z < 0) + P(0 < z < 3.25) = 0.4515 + 0.4994 = 0.9509$

11- $P(1.5 < z < 2.65) = P(0 < z < 2.65) - P(0 < z < 1.5) = 0.4960 - 0.4332 = 0.0628$

12- $P(-2.4 < z < -1.49) = P(-2.4 < z < 0) - P(0 < z < -1.49) = 0.4918 - 0.4319 = 0.0599$

13- $P(|z-2| \leq 0.82) = P(-0.82 \leq z-2 \leq 0.82) = P(2-0.82 \leq z \leq 2+0.82)$

$= P(1.18 \leq z \leq 2.82) = P(0 \leq z \leq 2.82) - P(0 \leq z \leq 1.18) = 0.4980 - 0.3810 = 0.117$

مثال 03 : إذا كان العمر الافتراضي لأحد الأنواع من البطاريات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1500 ساعة وانحراف معياري يقدر بـ 100 ساعة، أوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع ؟

2- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أكبر من 1650 ساعة ؟

3- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أقل من 1600 ساعة ؟

4- احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات على الأقل 1300 ساعة ؟

5- احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1550 ساعة و 1650 ساعة ؟

6- احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1450 ساعة و 1700 ساعة ؟

7- قيمة العمر الافتراضي للربيع الثالث Q_3 والعشير الرابع P_4 ؟

الحل :

1- كتابة دالة الاحتمال لهذا التوزيع :

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط($\mu = 1500$ ساعة)، وانحرافه المعياري ($\sigma = 100$ ساعة).

ونكتب $\boldsymbol{X \sim \mathbb{N}(1500, 1000)}$ وعليه تكون دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(x) = \frac{1}{100\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1500}{100}\right)^2} \qquad -\infty \le x \le \infty$$

ولأجل حساب أي احتمال نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z بالتحويلة: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-1500}{100}$

2- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أكبر من 1650 ساعة :

$$P(X > 1650) = P\left(Z > \frac{1650 - 1500}{100}\right) = P(Z > 1.5) = 0.5 - P(0 < Z < 1.5) = 0.5 - 0.4332$$
$$= 0.0668$$

3- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات أقل من 1600 ساعة :

$$P(X < 1600) = P\left(Z < \frac{1600 - 1500}{100}\right) = P(Z < 1) = 0.5 + P(0 < Z < 1) = 0.5 + 0.3413$$
$$= 0.8413$$

4- حساب احتمال أن يكون العمر الافتراضي لهذه البطاريات على الأقل 1300 ساعة :

$$P(X \geq 1300) = P\left(Z \geq \frac{1300-1500}{100}\right) = P(Z \geq -2) = 0.5 + P(-2 < Z < 0) = 0.5 + 0.4772$$
$$= 0.9772$$

5- حساب احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1550 ساعة و 1650 ساعة :

$$P(1550 < X < 1650) = P\left(\frac{1550-1500}{100} < Z < \frac{1650-1500}{100}\right) = P(0.5 < Z < 1.5)$$
$$= P(0 < Z < 1.5) - P(0 < Z < 0.5) = 0.3432 - 0.1915 = 0.1517$$

6- حساب احتمال أن يتراوح العمر الافتراضي لهذه البطاريات ما بين 1450 ساعة و 1700 ساعة :

$$P(1450 < X < 1700) = P\left(\frac{1450-1500}{100} < Z < \frac{1700-1500}{100}\right) = P(-0.5 < Z < 2)$$
$$= P(-0.5 < Z < 0) + P(0 < Z < 2) = 0.1915 + 0.4772 = 0.6687$$

7- ايجاد قيمة العمر الافتراضي للربيع الثالث Q_3 والعشير الرابع D_4:

أ- Q_3 هو العمر الافتراضي للبطاريات الذي يقل عنه أو يساويه 75 % من الأعمار الافتراضية ويقابل معياريا القيمة a والتي تحقق :

$$P(Z < a) = 75\% = 0.75$$

ومنه a التي تحقق العلاقة $P(Z < a) = 75\% = 0.75$ هي نفس a التي تحقق العلاقة :

$$P(0 < Z < a) = 0.25$$

وعليه فإن قيمة a القريبة والتي تحق هذه المعادلة هي : a=0.67 وبناءا عليه نجد قيمة الربيع الثالث كالتالي :

$$a = 0.67 = \frac{Q_3 - 1500}{100} \Rightarrow Q_3 = 100 \times 0.67 + 1500 \Rightarrow Q_3 = 1567 \text{ ساعة}$$

ب- D_4 هو العمر الافتراضي للبطاريات الذي يقل عنه أو يساويه 40 % من الأعمار الافتراضية ويقابل معياريا القيمة b والتي تحقق :

$$P(Z < b) = 40\% = 0.4$$

ومنه b التي تحقق العلاقة $P(Z < b) = 40\% = 0.4$ هي نفس b التي تحقق العلاقة :

$$P(b < Z < 0) = 0.1$$

وعليه فإن قيمة b القريبة والتي تحقق هذه المعادلة هي : b= -0.25 وبناءا عليه نجد قيمة العشير العاشر كالتالي :

$$b = -0.25 = \frac{D_4 - 1500}{100} \Rightarrow D_4 = 100 \times -0.25 + 1500 \Rightarrow D_4 = 1475 \text{ ساعة}$$

مثال 04 : وجد أن الفترة الزمنية الضرورية لإنجاز اختبار للذكاء لطلبة إحدى الكليات يتوزع احتماليا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 دقيقة وتباين يساوي 144 دقيقة.

1- أكتب دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع الاحتمالي ؟

2- ما هو احتمال أن يفوق زمن الاختبار 85 دقيقة ؟

3- ما هو احتمال أن يقل زمن الاختبار عن 60 دقيقة ؟

4- ما هو احتمال أن يتراوح زمن الاختبار بين 50 و 65 دقيقة ؟

5- كم يجب أن نحدد زمنا للاختبار إن أردنا إتاحة وقت كاف لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار ؟

الحل :

1- كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع الاحتمالي :

X متغير عشوائي مستمر، يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط ($\mu = 70$ دقيقة)، وانحرافه المعياري ($\sigma = \sqrt{144} = 12$ دقيقة). ونكتب $\boldsymbol{X \sim \mathbb{N}(70, 144)}$ وعليه تكون دالة كثافته الاحتمالية على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = f(x) = \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-70}{12}\right)^2} \qquad -\infty \le x \le \infty$$

ولأجل حساب أي احتمال نحوله إلى توزيع طبيعي قياسي Z بالتحويلة: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-70}{12}$

2- حساب احتمال أن يفوق زمن الاختبار 85 دقيقة :

$$P(X > 85) = P\left(Z > \frac{85 - 70}{12}\right) = P(Z > 1.25) = 0.5 - P(0 < Z < 1.25) = 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

3- حساب احتمال أن يقل زمن الاختبار عن 60 دقيقة :

$$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60 - 70}{12}\right) = P(Z < -0.83) = 0.5 - P(-0.83 < Z < 0) = 0.5 - 0.2967 = 0.2033$$

4- حساب احتمال أن يتراوح زمن الاختبار بين 50 و 65 دقيقة :

$$P(50 < X < 65) = P\left(\frac{50-70}{12} < Z < \frac{65-70}{12}\right) = P(-1.66 < Z < -0.41)$$
$$= P(-1.66 < Z < 0) - P(-0.41 < Z < 0) = 0.4515 - 0.1591 = 0.2924$$

5- حساب الزمن المحدد للاختبار إن أردنا إتاحة وقت كاف لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار:

لإيجاد الزمن الأدنى للاختبار والذي يعطي الوقت الكافي لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار ولنفرضه a فيكون :

$$P(Z \leq a) = 0.9$$

وقيمة a التي تحقق العلاقة السابقة هي نفس قيمة a التي تحقق العلاقة :

$$0.5 + P(0 \leq Z \leq a) = 0.9 \Rightarrow P(0 \leq Z \leq a) = 0.4$$

الآن نبحث في جدول التوزيع الطبيعي القياسي عن المساحة (0.4000) فلا نجدها، لذلك نأخذ أقرب قيمة لها وهي (0.3997) وبالتالي فإن قيمة a المقابلة لهذه القيمة هي : a=1.28 وهي أدنى زمن يمكن اتاحته للاختبار حتي يعطي وقتا كافيا لـ 90 % من الطلاب لإتمام الاختبار ، ولتحويلها إلى علامة طبيعية نستخدم العلاقة التالية :

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-70}{12} = 1.28 \Rightarrow x = (12 \times 1.28) + 70 \Rightarrow x = 85.36 \text{ دقيقة}$$

ثالثا : التوزيع الأسي Exponentielle Distribution

1- التعريف : من التوزيعات الاحتمالية المهمة جدا والتي تصف كثير من الظواهر العشوائية المتعلقة بالزمن، أين المتغير العشوائي قيمته عبارة عن لحظة معينة (مفاجئة) على محور الزمن، مثل : الزمن الذي تستغرقه آلة لكي تتعطل، مدة البقاء لبعض الأجزاء الالكترونية، الزمن بين وصول زبون وآخر في سوق مركزي، مدة خدمة شباك البريد، مدة مكالمة هاتفية، الزمن اللازم للانتهاء من تفريغ باخرة شحن، مدة تصليح آلة، مدة انتظار زبون قبل الحصول على الخدمة...

ويسمى هذا التوزيع الأسي ويسمى أيضا التوزيع الأسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون. فإذا كان وقوع أحداث معينة يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وقوع حدثين من هذه الأحداث تتبع التوزيع الأسي، فمثلا إذا كان وصول الزبائن إلى أحد شبابيك خدمة ما يتبع توزيع بواسون، فإن المدة الفاصلة بين وصول كل زبونين إلى الشباك تخضع للتوزيع الأسي.

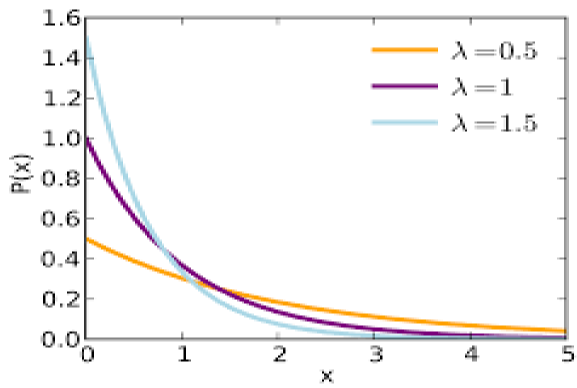
وغالبا ما يعبر عن التوزيع الأسي، اختصارا بـ : $X \sim Exp(\lambda)$ وهذا يعني بأن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة λ.

وهو توزيع احتمالي لمتغير عشوائي مستمر X يأخذ قيم ممكنة $X > 0$ وله دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda.x} & ,x > 0 \;\; et \;\; \lambda > 0 \\ 0 & ,x \leq 0 \end{cases}$$

حيث : λ عدد حقيقي موجب وهو معلمة التوزيع وتمثل المعدل أو المتوسط الذي تحصل به الظاهرة العشوائية.

ويمثل هذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :

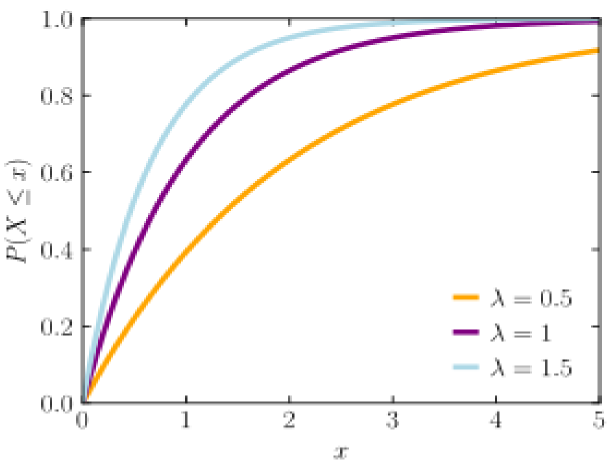


ملاحظة : يتغير شكل دالة الكثافة للتوزيع الأسي بتغير قيمة λ .

كما يتم التعبيرعن دالة التوزيع التراكمية F(x) لهذا التوزيع بالصورة التالية :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وتمثل دالة التوزيع التراكمية بيانيا وفق الشكل التالي :



2- الخصائص العددية للتوزيع المنتظم (المستمر) :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

مثال 05 : إذا كانت المدة الزمنية لبقاء جزء الكتروني في جهاز الكمبيوتر تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 1000 ساعة، فأوجد ما يلي :

1- دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر ؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير ؟

3- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر ؟

4- احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة بين 800 و1200 ساعة ؟

5- متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني وانحرافه المعياري ؟

الحل :

1- كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر :

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لبقاء الجزء الالكتروني في جهاز الكمبيوتر يتبع التوزيع الأسي، بمتوسط 1000 ساعة، فإن : $0 < x < \infty$، و المتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1000$ ، ومن ثم فإن قيمة λ تصبح تقدر بـ : $\lambda = \frac{1}{1000}$ ، وتكتب دالة الكثافة لهذا المتغير بالصورة التالية :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda.x} = \frac{1}{1000}\, e^{\frac{-x}{1000}} \qquad 0 < x < \infty$$

2- كتابة دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ 1-\ e^{-\lambda .x} & si \quad x>0\\ 1 & si \quad x\to\infty\end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ 1-\ e^{\frac{-x}{1000}} & si \quad x>0\\ 1 & si \quad x\to\infty\end{cases}$$

3- حساب احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة 1100 ساعة على الأكثر:

$$P(X\leq 1100)=F(1100)=1-\ e^{\frac{-1100}{1000}}=1-0.3328=0.6671$$

4- حساب احتمال أن يعيش هذا الجزء مدة بين 800 و1200 ساعة :

$$P(800\leq X\leq 1200)=P(X\leq 1200)-P(X\leq 800)=F(1200)-F(800)$$
$$=\left(1-\ e^{\frac{-1200}{1000}}\right)-\left(1-\ e^{\frac{-800}{1000}}\right)=0.6988-0.5506=0.1482$$

5- حساب متوسط الزمن لبقاء الجزء الالكتروني و انحرافه المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}=1000$$

ب- التباين :

$$V(X)=\frac{1}{\lambda^2}=1000000$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}=1000$$

مثال 06 : إذا كان زمن تقديم الخدمة للزبون في أحد مراكز بريد الجزائر يتبع التوزيع الأسي بمتوسط 8 دقائق، فأوجد :

1 - دالة كثافة الاحتمال التي تعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير ؟

3- احتمال أن يتم تقديم الخدمة خلال 5 دقائق أو أقل ؟

4- احتمال أن يتم تقديم الخدمة ما بين 6 و 9 دقائق ؟

5- متوسط الزمن اللازم لتقديم الخدمة للزبون وانحرافه المعياري ؟

الحل :

1- كتابة دالة كثافة الاحتمال لهذا المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر:

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن الفترة الزمنية لتقديم الخدمة للزبون في هذا المركز لبريد الجزائر يتبع التوزيع الأسي، بمتوسط 8 دقائق، فإن : $0 < x < \infty$، و المتوسط $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8$ ، ومن ثم فإن قيمة λ تصبح تقدر بـ: $\lambda = \frac{1}{8} = 0.125$ ، وتكتب دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير بالصورة التالية :

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda.x} = 0.125\, e^{-0.125\, x} \qquad 0 < x < \infty$$

2- كتابة دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda.x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

وبتعويض قيمة λ تصبح دالة التوزيع الاحتمالي على الشكل التالي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.125\, x} & si \quad x > 0 \\ 1 & si \quad x \to \infty \end{cases}$$

3- حساب احتمال أن يتم تقديم الخدمة خلال 5 دقائق أو أقل :

$$P(X \leq 5) = F(5) = 1 - e^{-0.125(5)} = 1 - 0.5352 = 0.4647$$

4- حساب احتمال أن يتم تقديم الخدمة ما بين 6 و 9 دقائق :

$$P(6 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 6) = F(9) - F(6) = \left(1 - e^{-0.125(9)}\right) - \left(1 - e^{-0.125(6)}\right)$$
$$= 0.6753 - 0.5276 = 0.1477$$

5- حساب متوسط الزمن اللازم لتقديم الخدمة للزبون و انحرافه المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 64$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = 8$$

رابعا : توزيع قاما Distribution Gamma

1- التعريف : يعد توزيع قاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام التي تعتمد على عنصر الزمن أو التي تستعمل في قياس المهل الزمنية، خاصة عند تقدير دالة المعولية (الثبات) أو دالة البقاء، مثل : الفترة الزمنية لفحص مريض، الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، أوقات الانتظار لدى المطاعم أو مكاتب الخدمات وحتى حجز قنوات الاتصال...إلخ، لهذا يشترط أن تكون القيم التي يأخذها المتغير العشوائي موجبة، ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة كالتوزيع الأسي، توزيع بيتا، توزيع كاي مربع، توزيع فيشر، توزيع ستودنت...إلخ.

فإذا كان لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن X مثلا، يتبع توزيع قاما، فإن دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل التالي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & , x > 0 \;\; et \;\; \alpha, \beta > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

ويعبر اختصارا عن توزيع قاما بـ : $\boldsymbol{X \sim G(\alpha, \beta)}$

حيث أن :

α، β تمثل معلمات توزيع قاما وتكونان موجبتان أي : $\alpha, \beta > 0$

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما والتي تكون من الشكل التالي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \;\; e^{-x} dx$$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد n عدد صحيح موجب، فإن دالة قاما تصبح :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

وفيما يلي بعض خصائص دالة قاما :

1) $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \quad ; \forall\ n > 0$

2) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) \quad ; \forall\, n > 0$

3) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad ; \forall\, n > 0$

4) $\Gamma(n) = \infty \Rightarrow n \leq 0$

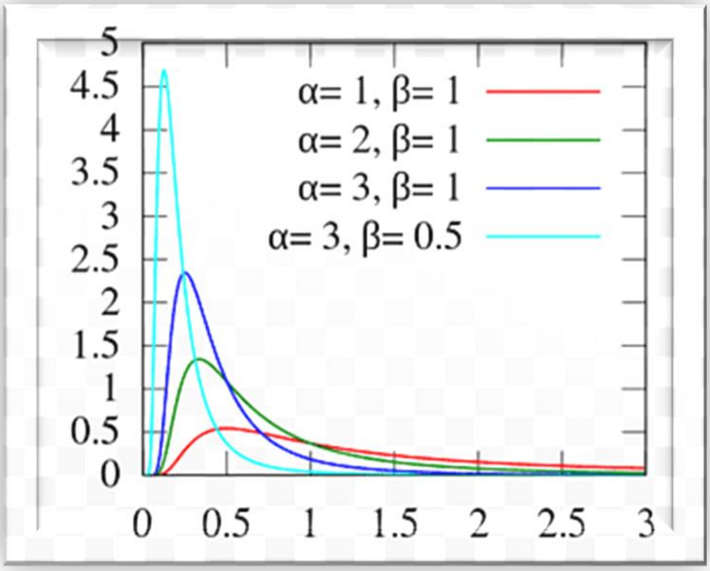
5) $\Gamma(1) = 0! = 1$

6) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

7) $\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(1-n)}{(-n)}$

8) $\Gamma(P)\Gamma(1-P) = \frac{\pi}{\sin(P.\pi)} \quad ; 0 < P < 1$

ويمثل توزيع قاما بيانيا وفق الشكل التالي :



ملاحظة : يتغير شكل دالة الكثافة لتوزيع قاما بتغير قيمة α و β .

- دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع : يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الآتي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dx = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^x x^{\alpha-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

2- الخصائص العددية لتوزيع قاما :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \alpha.\beta$$

ب- التباين :

$$V(X) = \alpha.\beta^2$$

جـ- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\alpha.\beta^2}$$

- **ملاحظة :** للتوزيعين قاما وبيتا علاقة بعدد من التوزيعات المهمة كالتوزيع الأسي وتوزيع كاي تربيع :

- فالتوزيع الأسي مثلا هو حالة خاصة من توزيع قاما عندما $\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$:

$$\alpha = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^{1-1}\, e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^1\Gamma(1)} = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} = \lambda\, e^{-\lambda.x}$$

- وعندما تكون المعلمتين ($\beta = 2$ ،$\alpha = \frac{n}{2}$) فإن توزيع قاما يتحول إلى وزيع كاي مربع بدرجة حرية (n)، والتي تعتبر حالة خاصة من توزيع قاما، والمعرفة بالمعادلة التالية :

$$\alpha = \frac{n}{2}\; et\; \beta = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}$$

مثال 07 : أحسب ما يلي :

- $\Gamma(8)$ ، $\Gamma(6)$ ، $\Gamma(9)$ ، $\Gamma(13)$ ، $\Gamma(5.5)$ ، $\Gamma(3.5)$ ، $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

- $\int_0^\infty x^3\ e^{-x}dx$ ، $\int_0^\infty x^7\ e^{-x}dx$ ، $\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx$

الحل :

- $\Gamma(8) = 7! = 5040$

- $\Gamma(6) = 5! = 120$

- $\Gamma(9) = 8! = 40320$

- $\Gamma(13) = 12! = 47900160$

- $\Gamma(5.5) = 4.5\Gamma(4.5) = (4.5)(3.5)\Gamma(3.5) = (4.5)(3.5)(2.5)\Gamma(2.5) =$
$(4.5)(3.5)(2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (4.5)(3.5)(2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 29.53125\sqrt{\pi}$

- $\Gamma(3.5) = (2.5)\Gamma(2.5) = (2.5)(1.5)\Gamma(1.5) = (2.5)(1.5)(0.5)\Gamma(0.5) = 1.875\sqrt{\pi}$

- $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=$
$\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{105}{16}\right)\sqrt{\pi}$

- $\int_0^{\infty} x^3\ e^{-x}dx=\int_0^{\infty} x^{4-1}\ e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6$

- $\int_0^{\infty} x^7\ e^{-x}dx=\int_0^{\infty} x^{8-1}\ e^{-x}dx=\Gamma(8)=7!=5040$

- $\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\ e^{-x}dx=\int_0^{\infty} x^{\frac{-1}{2}}\ e^{-x}dx=\int_0^{\infty} x^{(\frac{1}{2}-1)}\ e^{-x}dx=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

مثال 08 :

إذا كانت مدة اشتغال (بقاء) أحد الآلات في مصنع كبير تتبع توزيع قاما بالمعلمتين($\alpha=2$ و $\beta=3$)، فأوجد :

1- دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المدة الزمنية لاشتغال هذه الآلة؟

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير؟

3- احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة 8 سنوات على الأكثر ؟

4- احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تفوق 10 سنوات ؟

5 -أحتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تتراوح ما بين 8 سنوات و12 سنة ؟

6- متوسط بقاء هذه الآلة في العمل وانحرافها المعياري ؟

الحل :

1- دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي الذي يعبر عن المدة الزمنية لاشتغال هذه الآلة :

بما أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن المدة الزمنية لاشتغال هذه الآلة يتبع توزيع قاما، بالمعلمات ($\alpha=2$ و $\beta=3$)، فإن دالة كثافته الاحتمالية تكتب بالصورة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}\ e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & ,x>0\ \ et\ \ \alpha,\beta>0\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$$

وبتعويض قيمة $\alpha=2$ و $\beta=3$ تصبح الدالة على النحو التالي :

$$f(x) = \frac{x^{2-1}\, e^{-\frac{x}{3}}}{3^2 \Gamma(2)} = \frac{x}{9}\, e^{-\frac{x}{3}} \qquad ; \ 0 < x < \infty$$

2- دالة التوزيع التراكمية لهذا المتغير:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^x \frac{x}{9}\, e^{-\frac{x}{3}} dx$$

نلاحظ أن هذا التكامل يتكون من جداء دالتين u و v، ولهذا سوف نعتمد على قاعدة التكامل بالتجزئة وذلك وفق العلاقة التالية :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وبوضع تجزئة الدالة الأصلية على النحو التالي :

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{9} & dv = e^{-\frac{x}{3}} \\ du = \dfrac{1}{9} & v = \dfrac{e^{-\frac{x}{3}}}{-\frac{1}{3}} = -3e^{-\frac{x}{3}} \end{cases}$$

وبتطبيق قاعدة التكامل بالتجزئة نحصل على :

$$\begin{aligned} F(x) = P(X \leq x) &= \int_0^x \frac{x}{9}\, e^{-\frac{x}{3}} dx = \left[\frac{x}{9}\left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{9}\left(-3e^{-\frac{x}{3}}\right) \\ &= \left[-\frac{x}{3}\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x - \left[\frac{1}{9}\left(-3(-3)e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x = \left[-\frac{x}{3}\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x - \left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\right]_0^x \\ &= \left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right) - 1\right)\right]_0^x \end{aligned}$$

3-إيجاد احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة 8 سنوات على الأكثر:

$$\begin{aligned} P(X \leq 8) = F(8) &= \left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right) - 1\right)\right]_0^8 = \left[\left(e^{-\frac{8}{3}}\right)\left(\left(-\frac{8}{3}\right) - 1\right)\right] - \left[\left(e^{-\frac{0}{3}}\right)\left(\left(-\frac{0}{3}\right) - 1\right)\right] \\ &= (-0.2544) - (-1) = 0.7455 \end{aligned}$$

4- إيجاد احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تفوق 10 سنوات :

$$P(X>10)=1-F(10)=1-\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^{10}$$
$$=1-\left(\left[\left(e^{-\frac{10}{3}}\right)\left(\left(-\frac{10}{3}\right)-1\right)\right]-\left[\left(e^{-\frac{0}{3}}\right)\left(\left(-\frac{0}{3}\right)-1\right)\right]\right)$$
$$=1-\big((-0.1545)-(-1)\big)=0.1545$$

5- إيجاد احتمال أن تستمر هذه الآلة في العمل لمدة تتراوح ما بين 8 سنوات و12 سنة :

$$P(8\leq X\leq 12)=P(X\leq 12)-P(X\leq 8)=F(12)-F(8)$$
$$=\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^{12}-\left[\left(e^{-\frac{x}{3}}\right)\left(\left(-\frac{x}{3}\right)-1\right)\right]_0^{8}$$
$$=\left(\left[\left(e^{-\frac{12}{3}}\right)\left(\left(-\frac{12}{3}\right)-1\right)\right]-\left[\left(e^{-\frac{0}{3}}\right)\left(\left(-\frac{0}{3}\right)-1\right)\right]\right)-(0.7455)$$
$$=(0.9084)-(0.7455)=0.1629$$

6- حساب متوسط بقاء هذه الآلة في العمل و انحرافها المعياري :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\alpha.\beta=2.3=6$$

ب- التباين :

$$V(X)=\alpha.\beta^2=2.9=18$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{18}=4.24$$

خامسا : توزيع بيتا Distribution bêta

1- التعريف : إن توزيع بيتا مشتق من دالة بيتا أو ما يسمى في بعض الأحيان بتكامل بيتا، وللتوزيع أهمية في تطبيقات الرقابة على جودة الإنتاج من خلال تكوين جداول عينات القبول والتي تستخدم في اتخاذ القرار بشأن قبول وحدات الإنتاج استنادا إلى نسب الوحدات المعيبة في العينة فضلا عن التطبيقات الأخرى.

ودالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع تعطى وفق الصياغة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1 \;\; et \;\; (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

ويمكن كتابتها على الشكل التالي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1 \;\; et \;\; (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

ويعبر اختصارا عن توزيع بيتا بـ : $\boldsymbol{X \backsim \beta(\alpha,\beta)}$

حيث $\beta(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا والتي تحسب كالتالي :

$$\beta(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad \alpha,\beta>0$$

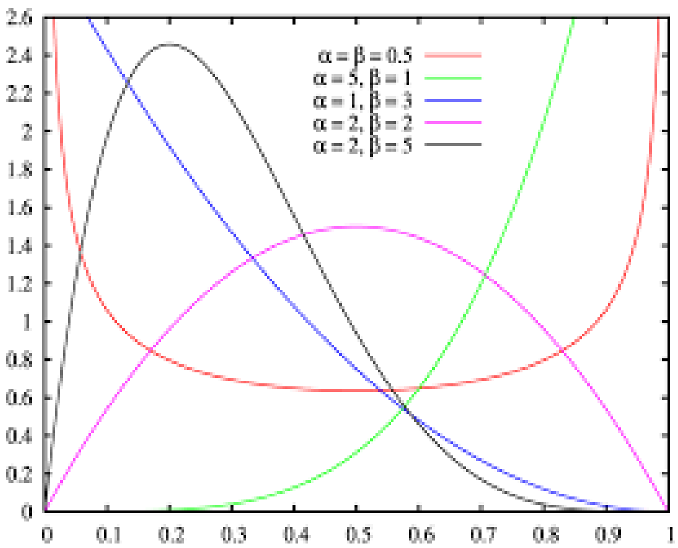
ولدالة بيتا علاقة بدالة قاما حيث نجد أن :

$$\beta(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

ومن بين خواص هذه الدالة :

$$\beta(\alpha,\beta)=\beta(\beta,\alpha), \qquad \beta(1{,}1)=1\,, \qquad \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\pi$$

ويمثل توزيع بيتا بيانيا وفق الشكل التالي :



ملاحظة : يتغير شكل دالة الكثافة لتوزيع بيتا بتغير قيمة α و β .

- **دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع :** يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما بالشكل الآتي :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \dfrac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

2- الخصائص العددية لتوزيع بيتا :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}}$$

مثال 09 : أحسب ما يلي:

$$\beta(2,4),\quad \beta(3,4),\quad \beta(6,8),\quad \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \beta(n,2),\quad \beta(1,n)\quad n \in N$$

$$\int_0^1 x^3(1-x)^5dx\ ,\quad \int_0^1 x^2(1-x)^3dx\ ,\int_0^1 (1-x)^3dx$$

الحل :

$$*\beta(1,n) = \frac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(1+n)} = \frac{(n-1)!}{n\Gamma(n)} = \frac{(n-1)!}{n(n-1)!} = \frac{1}{n}$$

$$*\beta(n,2) = \frac{\Gamma(2)\Gamma(n)}{\Gamma(n+2)} = \frac{(n-1)!}{\Gamma(n+1+1)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)\Gamma(n+1)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n\Gamma(n)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$*\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}.\sqrt{\pi}}{\Gamma(1)} = \pi$$

$$*\beta(6,8) = \frac{\Gamma(6)\Gamma(8)}{\Gamma(6+8)} = \frac{5!7!}{13!} = \frac{120.5040}{6227020800} = 9.71.10^{-5}$$

$$*\beta(3,4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{2!3!}{6!} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$$

$*\beta(2,4)=\frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(2+4)}=\frac{1!3!}{5!}=\frac{1}{20}\quad Or\ \beta(2,4)=\frac{1}{4(4+1)}=\frac{1}{20}$

$*\int_0^1(1-x)^3dx=\beta(1,4)=\frac{1}{4}$

$*\int_0^1 x^2(1-x)^3dx=\beta(3,4)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)}=\frac{2!3!}{6!}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$

$*\int_0^1 x^3(1-x)^5dx=\beta(4,6)=\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(4+6)}=\frac{3!5!}{9!}=\frac{6}{3024}=\frac{1}{504}$

مثال 10 : يريد أحد مديري الجودة في أحد المصانع الخاصة بإنتاج الأجهزة الكهرومنزلية تقدير جودة الإنتاج بناء على نسبة الوحدات المعيبة في العينة، فإذا علمت أن المتغير العشوائي X الذي يعبر عن نسبة الوحدات المعيبة في هذا المصنع يتبع توزيع بيتا بالمعلمات $(\alpha=5,\beta=2)$، فأجب على ما يلي :

1- أحسب القيم : $\Gamma(2)$ ، $\Gamma(5)$ ، $\Gamma(7)$ ؟

2- أوجد دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع ؟

3 - أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع ؟

4 - أحسب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب لا تتجاوز 20 % ؟

5 - أحسب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب 15 % على الأقل ؟

6- أحسب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب تتراوح ما بين 12 % و 20 % ؟

7 - أحسب النسبة المتوقعة للإنتاج المعيب في مصنع الأجهزة الكهرومنزلية، ثم التباين والانحراف المعياري له ؟

<u>الحل :</u>

(X) المتغير العشوائي الذي يعبر عن نسبة الإنتاج المعيب في مصنع الأجهزة الكهرومنزلية والذي يتبع توزيع بيتا بالمعلمات $(\alpha=5,\beta=2)$، ويمكن التعبير عنه اختصارا بـ: $X\backsim\beta(\alpha,\beta)$ أي $X\backsim\beta(5,2)$

1- حساب القيم التالية لحالات دالة قاما التالية :

لدينا من الصيغة العامة لدالة قاما : $\Gamma(n)=(n-1)!$ وبالتالي فإن :

$\Gamma(2)=(2-1)!=1!=1$

$\Gamma(5)=(5-1)!=4!=24$

$\Gamma(7)=(7-1)!=6!=720$

2- ايجاد دالة كثافة الاحتمال لهذا التوزيع :

لدينا الصيغة العامة لتوزيع بيتا هي على النحو التالي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1 \;\; et \;\; (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

وبتعويض قيمة المعلمتين $(\alpha=5,\beta=2)$ في دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع بيتا نجد :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(5+2)}{\Gamma(5)\Gamma(2)}x^{5-1}\,(1-x)^{2-1} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

وبحساب قيم دالة قاما نجد :

$$f(x)=\begin{cases}30\,x^4\,(1-x) & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}$$

3 - ايجاد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع :

يتم التعبير عن دالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيتا بالشكل الآتي :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^x x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1}dx & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

أي أن :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ 30\displaystyle\int_0^x x^4\,(1-x)dx & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}F(x)&=P(X\le x)\\ &=30\int_0^x x^4\,(1-x)dx \;=30\int_0^x (x^4-x^5)dx=\;30\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}\right]_0^x=[6x^5-5x^6]_0^x\\ &=6x^5-5x^6\end{aligned}$$

ومنه فإن دالة التوزيع التراكمية لهذا التوزيع تكون بالصيغة التالية :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=\begin{cases}0 & si\ x\le 0\\ 6x^5-5x^6 & si\ 0<x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$

4 - حساب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب لا تتجاوز 20 % :

$$P(X \leq 0.20) = F(0.20) = 6(0.20)^5 - 5(0.20)^6 = 0.0016$$

5 - حساب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب 15 % على الأقل :

$$P(X \geq 0.15) = 1 - P(X < 0.15) = 1 - F(0.15) = 1 - (6(0.15)^5 - 5(0.15)^6) = 1 - 0.0039 = 0.9996$$

6 - حساب احتمال أن تكون نسبة الإنتاج المعيب تتراوح ما بين 12 % و 20 % :

$$P(0.20 \leq X \leq 0.12) = P(X \leq 0.20) - P(X \leq 0.12) = F(0.20) - F(0.12) = 0.0016 - (6(0.12)^5 - 5(0.12)^6) = 0.0014$$

7 - حساب النسبة المتوقعة للإنتاج المعيب في الأجهزة الكهرومنزلية، ثم التباين والانحراف المعياري له :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7} = 0.71$$

$$V(X) = \frac{\alpha . \beta}{(\alpha+\beta)^2 . (\alpha+\beta+1)} = \frac{5.2}{(5+2)^2 . (5+2+1)} = \frac{10}{49 \times 8} = \frac{10}{392} = 0.025$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.025} = 0.15$$

سادسا : توزيع ستيودنت (t)

1- التعريف : هو أحد التوزيعات الإحتمالية المتصلة، يشبه كثيرا التوزيع الطبيعي، تكمن تطبيقاته في نظرية العينات واختبار الفرضيات كبديل للتوزيع الطبيعي عندما يكون حجم العينة صغيرا.

دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma(\frac{v}{2})}(1 + \frac{x^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}} \qquad ; -\infty < x < +\infty \; et \; v \in \mathbb{N}$$

ونكتب اختصارا : $X \backsim t(v)$

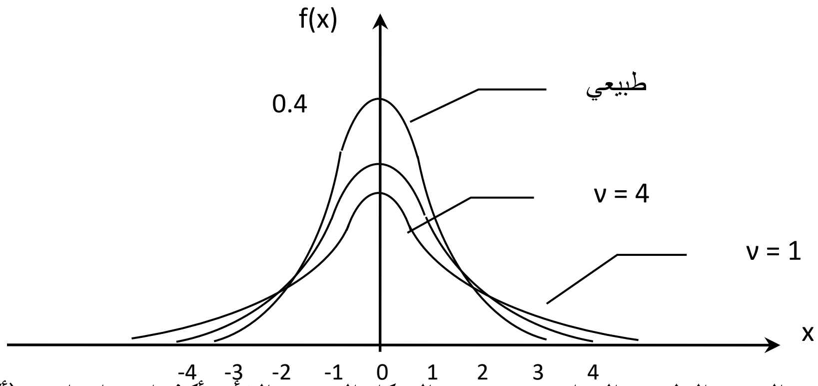
حيث :

π : ثابت $\pi = 3.1416$

v : درجات الحرية[1] والتي تساوي حجم العينة ناقص 1 أي $v = n - 1$

ونرمز لإحصائية ستيودنت عند درجة حرية v ومستوى معنوية α بالرمز $t_{(\alpha,v)}$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



يتشابه توزيع t مع التوزيع الطبيعي القياسي من حيث الشكل الجرسي إلا أنه أكثر انخفاضا منه (أكثر تفلطحا وانبساطا منه) وعندما تزداد درجات الحرية فإن توزيع t يقترب من التوزيع الطبيعي القياسي، ويعتبر المنحنيان متطابقان تقريبا عندما $v \geq 30$.

2- الخصائص العددية لتوزيع ستيودنت:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = 0$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{v}{v-2} \quad ; v > 2$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{v}{v-2}}$$

[1] درجات الحرية تعرف بأنها العدد N من المشاهدات المستقلة في العينة ناقص العدد K لمعالم المجتمع (الوسط الحسابي والانحراف المعياري) أي أن : $v = n - K$ في حالة توزيع t فإن : $v = n - 1$ على أساس أنه يجب معرفة المتوسط الحسابي لهذا التوزيع والذي يساوي الصفر، وبالتالي يكون عدد المعالم المقدرة هو 1.

ملاحظات :

- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد، والتوزيع متماثل (متناظر) حول الصفر.

- تحسب احتمالات توزيع t من خلال الجداول الخاصة بهذا التوزيع مثل التوزيع الطبيعي القياسي (أنظر الملاحق) إلا أن جداول توزيع t تختلف بعض الشيء حيث تعتمد على درجات الحرية، التي تسجل في العمود الأيسر، أما في الأعلى فتقرأ المساحة (الاحتمالية) وفي داخل الجدول تقرأ قيمة t المقابلة.

- من خلال خاصية التناظر لتوزيع t نجد ما يلي :

$$t_{(\alpha,v)} = -t_{(1-\alpha,v)}$$

$$P\left(T \geq t_{(v)}\right) = P\left(T \leq -t_{(v)}\right) = \alpha$$

$$P\left(T \leq t_{(v)}\right) = P\left(T \geq -t_{(v)}\right) = 1-\alpha$$

مثال 11: باستخدام جدول توزيع t أوجد :

$$t_{(0.025,12)} \quad ; t_{(0.05,3)} \quad ; t_{(0.99,11)} \quad ; t_{(0.995,9)} \quad ; t_{(0.90,16)}$$

الحل :

* $t_{(0.025,12)}$: تعني القيمة التي يقع يمينها مساحة قدرها 0.025 ودرجة الحرية تساوي 12، أي أن القيمة ستكون موجبة ومن خلال الجدول نستطيع إيجادها مباشرة بحيث نختار من العمود الأيسر (عمود درجات الحرية v) القيمة 12، ونختار من الصف الأول (صف المساحات α) القيمة 0.025 وعند تقاطع العمود مع الصف نحصل على القيمة $t_{(0.025,12)}$ ونجدها تساوي 2.179 أي :

$$t_{(0.025,12)} = 2.179$$

* $t_{(0.05,3)}$: بنفس التحليل في الفقرة السابقة نجدها من خلال تقاطع المساحة $(\alpha = 0.05)$ مع درجة الحرية $(v = 3)$ نجدها تساوي 2.353 أي :

$$t_{(0.05,3)} = 2.353$$

* $t_{(0.99,11)}$: وتعني القيمة التي على يمينها مساحة مقدارها 0.99 ودرجة حرية 11، ولإيجاد القيمة $t_{(0.99,11)}$ نلاحظ أن جدول التوزيع لا يحتوي على القيم السالبة (أي المساحات التي أكبر من 0.5) لذلك نستعمل خاصية تماثل جدول التوزيع حول الصفر أي :

$$t_{(\alpha,v)} = -t_{(1-\alpha,v)}$$

أي : $t_{(0.99,11)} = -t_{(1-0.99,11)} = -t_{(0.01,11)} = -2.718$

* $t_{(0.995,9)}$: بنفس التحليل للفقرة السابقة وباستخدام خاصية التماثل نجد أن :

$$t_{(0.995,9)} = -t_{(1-0.995,9)} = -t_{(0.005,9)} = -3.250$$

* $t_{(0.90,16)}$: بنفس التحليل للفقرتين السابقتين وباستخدام خاصية التماثل نجد أن :

$$t_{(0.90,16)} = -t_{(1-0.90,16)} = -t_{(0.10,16)} = -1.337$$

مثال 12 : باستخدام جدول t أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 11 و t=2.812 ؟

2- أوجد المساحة الواقعة على يسار t=-2.13 وعند درجة حرية 15 ؟

3- أوجد درجة الحرية لقيمة t= 4.032 والتي تقع على يمينها المساحة 0.005 ؟

الحل :

1- لدينا $v = n - 1$، أي أن $v = 10$ و $\mathrm{t} = 2.812$ وبالتالي ومن خلال جدول t فإن المساحة المقابلة هي 0.95 .

2- بما أن قيمة t سالبة فإننا نستخدم خاصية التناظر (لأنه لا توجد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t(\alpha, 15) = -t(1-\alpha, 15)$$

إن قيمة t=-2.13 تقابلها t=2.13 ومساحتها 0.975 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار -2.13، فيكون : $1-\alpha=0.975$ من الجدول، ومنه $\alpha = 1 - 0.975 = 0.025$، أي المساحة الواقعة على اليسار وعند درجة حرية 15هي 0.025 .

3- لدينا من خلال المعطيات : $t(0.005, v) = 4.032$ وبالتالي ومن خلال جدول t نجد أن درجة الحرية التي تحقق $t(0.005, v) = 4.032$ هي 5 أي أن : $v = 5$

سابعا : توزيع كاي مربع χ^2 (Khi deux)

1-التعريف : هو توزيع احتمالي متصل ، له استعمالات متعددة خاصة مجال التقدير وفي اختبار الفرضيات واختبارات الارتباط والاستقلال والتوفيق، وهو معرف بالمتغير العشوائي χ^2. دالة كثافته الاحتمالية تعطى بالعلاقة التالية :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\left(\frac{v}{2}\right)}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}x^{\left(\frac{v}{2}-1\right)}e^{-\frac{x}{2}} & ,x>0\ \ et\ \ v\in\mathbb{N}\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$$

ونكتب اختصارا : $\boldsymbol{X} \backsim \boldsymbol{\chi}^2{}_{(v)}$

حيث :

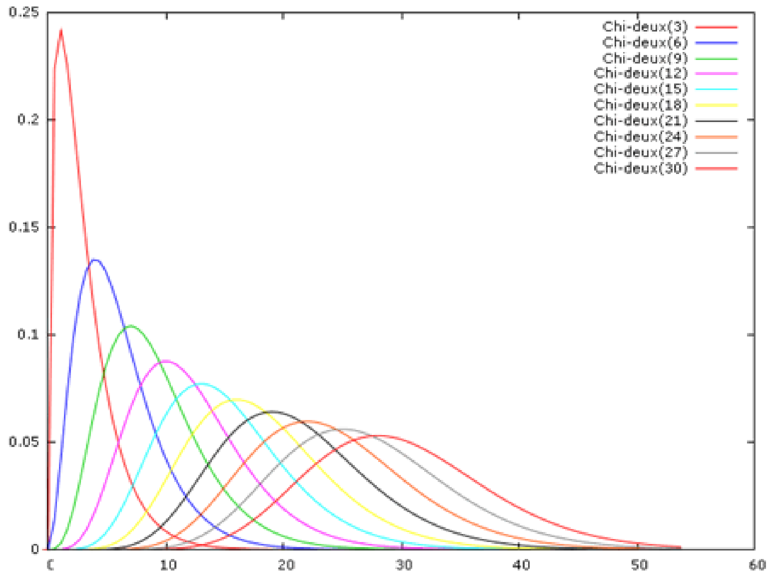
e : ثابت ويقدر بالتقريب $e=2.7182$

v : درجات الحرية والتي تساوي حجم العينة ناقص 1 أي $v=n-1$

Γ : دالة قاما .

ونرمز لإحصائية كاي مربع عند درجة حرية v ومستوى معنوية α بالرمز $\chi^2{}_{(\alpha,v)}$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



منحنى كاي مربع يكون في الجانب الموجب فقط وهو غير متماثل، بل هو ملتو التواء موجب أي من جهة اليمين، ويأخذ أشكالا مختلفة حسب قيمة v، حيث يقترب من التوزيع الطبيعي كلما كبرت v كما هو مبين في الشكل أعلاه.

2- الخصائص العددية لتوزيع كاي مربع:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=v$$

ب- التباين :

$$V(X) = 2v$$

ج- الانحراف المعياري :

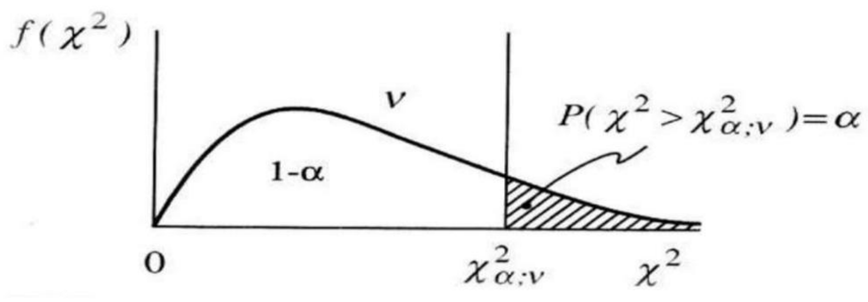
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2v}$$

ملاحظات :

- هذا التوزيع يعتبر حالة خاصة من توزيع قاما لما : $\alpha = 1$, $\beta = 1/\lambda$.

- لإيجاد احتمالات الـχ^2، فإننا نستخدم الجدول الخاص بهذا التوزيع، حيث نجد أفقيا المساحة المقابلة وعموديا درجات الحرية وفي داخل الجدول تقرأ قيم الـχ^2 المقابلة .

- تحسب جداول كاي تربيع احتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من الإحصائية $\chi^2{}_{(\alpha,v)}$ هو α ونكتب : $P(X \geq \chi^2{}_{(\alpha,v)}) = \alpha$ كما يمكن أن تحسب العكس (أصغر) لكن نستبدل α بـ $(1-\alpha)$ والذي يدعى عادة بمجال الثقة أي : $P(X \leq \chi^2{}_{(\alpha,v)}) = 1-\alpha$ ، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي :



مثال 13 :

إذا كان المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية 10، فأوجد :

1- قيمة χ^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة ؟

2- قيمة χ^2التي يكون إلى يمينها 0.01 من المساحة ؟

3- قيمة χ^2 التي يكون إلى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون إلى يسارها 0.025 من المساحة ؟

الحل :

1- قيمة χ^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة :

المساحة على اليسار 0.99 تعني أن $1 - \alpha = 0.99$ أي أن : $\alpha = 0.01$ وبالتالي فإن قيمة χ^2 التي نبحث عنها نجدها من الجدول مباشرة وهي : $\chi^2_{(0.01,10)} = 23.209$

2- قيمة χ^2 التي يكون على يمينها 0.01 من المساحة :

نلاحظ أن المساحة التي تقع على يمين χ^2 هي $\alpha = 0.01$ وهي المساحة التي تقع على يسارها $1 - \alpha = 0.99$ وبذلك فإن قيمة χ^2 هي : $\chi^2_{(0.01,10)} = 23.209$

3- قيمة χ^2 التي يكون إلى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون إلى يسارها 0.025 من المساحة :

من الجدول نجد أن قيمة χ^2 التي تقع على يمينها المساحة $\alpha = 0.975$ هي نفسها التي تقع على يسارها المساحة $1 - \alpha =$ 0.025 وبذلك فإن قيمة χ^2 هي : $\chi^2_{(0.975,10)} = 3.247$

مثال 14 :

إذا كان المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية v = 15 أوجد احتمال أن تكون قيمته :

1- أقل من أو تساوي 6.262 ؟

2- أكبر من أو تساوي 22.307 ؟

3- محصورة بين 7.261 و 27.488 ؟

الحل :

X يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية v = 15 ونكتب اختصارا : $X \sim \chi^2_{(15)}$

1- حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من أو تساوي 6.262 :

$$P(X \leq 6.262) = 1 - P(X \geq 6.262) = 1 - 0.975 = 0.025$$

2 – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أكبر من أو تساوي 22.307 :

$$P(X \geq 22.307) = 0.1$$

3 – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير محصورة بين 7.261 و 27.488 :

$$P(7.261 \le X \le 27.488) = P(X \le 27.488) - P(X \le 7.261)$$
$$= [1 - P(X \ge 27.488)] - [1 - P(X \ge 7.261)] = (1 - 0.025) - (1 - 0.95)$$
$$= 0.925$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(7.261 \le X \le 27.488) = P(X \ge 7.261) - P(X \ge 27.488) = 0.95 - 0.025 = 0.925$$

ثامنا : توزيع فيشر F(فيشر، سنيديكور، Fischer ،Snedecor):

1- التعريف : أحد التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة، والمستخدمة في الإحصاء الاستدلالي، لإجراء اختبار الفرضيات وفي تحليل التباين وتصميم التجارب وإختبار معنوية معادلة الانحدار، وغيرها من الاختبارات، ويعرف هذا التوزيع العشوائي بالدالة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{v_1+v_2}{2})}{\Gamma(\frac{v_1}{2})\Gamma(\frac{v_2}{2})} \left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} \dfrac{x^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}} & , x > 0 \ \ et \ \ v \in \mathbb{N} \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

ونكتب اختصارا : $\boldsymbol{X \backsim F(v_1; v_2)}$

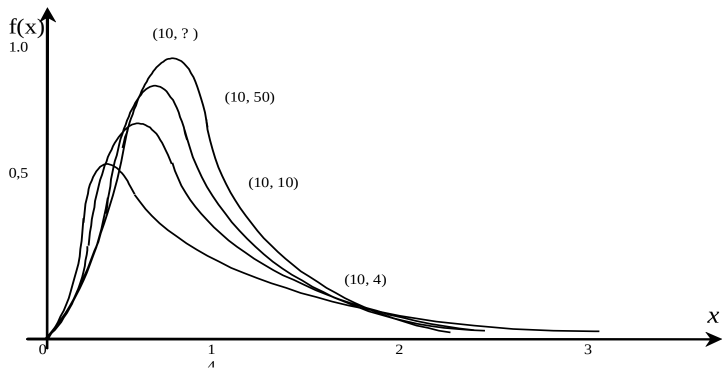
حيث :

v_1 و v_1 : درجات الحرية لتوزيع فيشر F .

Γ : دالة قاما .

ونرمز لإحصائية فيشر عند درجتي حرية v_1 و v_2 ومستوى معنوية α بالرمز $F(v_1; v_2)$ أو $F(\alpha; v_1; v_2)$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية لهذا التوزيع بيانيا وفق الشكل التالي :



ومن خواص منحنى توزيع F أنه أحادي المنوال ملتو قليلا إلى اليمين، وكلما زادت درجات الحرية v_1 و v_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.

2 - الخصائص العددية لتوزيع فيشر:

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} \qquad ; v_2 > 2$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{2(v_2)^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2} \qquad ; \ v_2 > 4$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2(v_2)^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2}}$$

ملاحظات :

- تحسب جداول فيشر احتمال أن يكون المتغير العشوائي أكبر من الإحصائية $F(\alpha; v_1; v_2)$ هو α ونكتب: $P(X \geq F(\alpha; v_1; v_2)) = \alpha$ كما يمكن أن تحسب العكس (أصغر) لكن نستبدل α بـ $(1 - \alpha)$ والذي يدعى عادة بمجال الثقة أي : $P(X \leq F(\alpha; v_1; v_2)) = 1 - \alpha$.

- هناك بعض المساحات الكبيرة لا توجد في جداول توزيع F، ولإيجاد هذه المساحة فإنه يمكن استعمال القاعدة التالية:

$$F(\alpha; v_1; v_2) = \frac{1}{F(1 - \alpha; v_2; v_1)}$$

مثال 15: أوجد ما يلي :

- $F(0.01; 6; 10)$
- $F(0.025; 12; 8)$
- $F(0.99; 8; 12)$
- $F(0.95; 14; 10)$

الحل :

- $F(0.01;6;10) = 5.39$

- $F(0.025;12;8) = 4.2$

- $F(0.99;8;12) = \frac{1}{F(0.01;12;8)} = \frac{1}{5.67} = 0.1763$

- $F(0.95;14;10) = \frac{1}{F(0.05;10;14)} = \frac{1}{2.6} = 0.3846$

مثال 16 : إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $(v_1 = 7; v_2 = 12)$، فأحسب :

1- احتمال $P(X \geq 2.91)$ ؟

2- احتمال $P(X \geq 3.61)$ ؟

3- احتمال $P(X < 4.64)$ ؟

4- المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري ؟

الحل :

لحساب الاحتمالات المطلوبة نطبق القاعدة التالية : $P(X \geq F(\alpha; v_1; v_2)) = \alpha$

1- حساب احتمال $P(X \geq 2.91)$:

حساب الاحتمال المطلوب يتم عن طريق البحث عن قيمة α التي تحقق $F(\alpha;7;12) = 2.91$ في جداول فيشر ذات الاحتمالات المختلفة فنجد أن قيمة α التي تحقق ذلك هي : $\alpha = 0.05$ وبالتالي فإن :

* $P(X \geq 2.91) = 0.05 \Rightarrow F(0.05;7;12) = 2.91$

2- حساب احتمال $P(X \geq 3.61)$:

بنفس طريقة حساب الحالة الأولى نجد أن قيمة α هي : $\alpha = 0.025$ وبالتالي فإن :

* $P(X \geq 3.61) = 0.025 \Rightarrow F(0.025;7;12) = 3.61$

3- حساب احتمال $P(X < 4.64)$:

لدينا من خاصية الاحتمال المتمم فإن : $P(X < 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64)$

وباتباع نفس الخطوات للحالة الأولى والثانية نجد أن قيمة α التي تحقق $F(\alpha; 7; 12) = 4.64$ هي : $\alpha = 0.01$ وبالتالي فإن :

$$*P(X < 4.64) = 1 - P(X \geq 4.64) = 1 - 0.01 = 0.99$$

4 – حساب :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} = \frac{12}{12 - 2} = 1.2$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{2(v_2)^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2} = \frac{2(12)^2(7 + 12 - 2)}{7(12 - 4)(12 - 2)^2} = \frac{4896}{560} = 8.74$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{8.74} = 2.95$$

تاسعا : ملخص أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة

اسم ورمز القانون	دالة الكثافة الاحتمالية	خصائص التوزيع
التوزيع المنتظم $X \sim \mathbb{U}(a;b)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si\ x\in[a;b]\\ 0 & sinon\end{cases}$	$E(X)=\dfrac{b+a}{2}$ $V(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
التوزيع الطبيعي : التوزيع الطبيعي العام $X \sim \mathbb{N}(\mu,\sigma^2)$	التوزيع الطبيعي العام : $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty\le x\le\infty$	$\sigma>0$ و $\mu\in R$ ثابتان اختياريان
التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) $Z \sim \mathbb{N}(0,1)$	التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي) : $f(z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty\le z\le\infty$	$\sigma=1$ و $\mu=0$
التوزيع الأسي $X \sim Exp(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda\, e^{-\lambda.x} & ,x>0\ et\ \lambda>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$	$E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$ $V(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$
توزيع قاما $X \sim G(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}\,e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & ,x>0\ et\ \alpha,\beta>0\\ 0 & ,x\le 0\end{cases}$ $\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما والتي تكون من الشكل التالي : $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\ e^{-x}dx$ وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد n عدد صحيح موجب، فإن دالة قاما تصبح : $\Gamma(n)=(n-1)!$	$E(X)=\alpha.\beta$ $V(X)=\alpha.\beta^2$
توزيع بيتا $X \sim \beta(\alpha,\beta)$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0<x<1\ et\ (\alpha,\beta)>0\\ 0 & ailleurs\end{cases}$ حيث $\beta(\alpha,\beta)$ هي دالة بيتا والتي تحسب كالتالي : $\beta(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad \alpha,\beta>0$ ولدالة بيتا علاقة بدالة قاما حيث نجد أن : $\beta(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$	$E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ $V(X)=\dfrac{\alpha.\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}$

$E(X)=0$ $V(X)=\frac{v}{v-2}\ ;v>2$ $t_{(\alpha,v)}=-t_{(1-\alpha,v)}$ $P(T\geq t_{(v)})=P(T\leq -t_{(v)})=\alpha$ $P(T\leq t_{(v)})=P(T\geq -t_{(v)})=1-\alpha$	$f(x)=\frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma(\frac{v}{2})}(1+\frac{x^2}{v})^{-\frac{(v+1)}{2}}\quad ;-\infty<x<+\infty\quad et\quad v\in\mathbb{N}$	**توزيع ستيودنت** $\boldsymbol{X\sim t(v)}$
$E(X)=v$ $V(X)=2v$ $P(X\geq\ {\chi^2}_{(\alpha,v)})=\alpha$ $P(X\leq\ {\chi^2}_{(\alpha,v)})=1-\alpha$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{(\frac{v}{2})}\Gamma(\frac{v}{2})}x^{(\frac{v}{2}-1)}\,e^{-\frac{x}{2}} & ,x>0\ \ et\ \ v\in\mathbb{N}\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$	**توزيع كاي مربع** $\boldsymbol{X\sim {\chi^2}_{(v)}}$
$E(X)=\frac{v_2}{v_2-2}\quad ;v_2>2$ $V(X)=\frac{2(v_2)^2(v_1+v_2-2)}{v_1(v_2-4)(v_2-2)^2}\ ;\ v_2>4$ $P(X\geq F(\alpha;v_1;v_2))=\alpha$ $P(X\leq F(\alpha;v_1;v_2))=1-\alpha$ $F(\alpha;v_1;v_2)=\frac{1}{F(1-\alpha;v_2;v_1)}$	$f(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}}\frac{x^{\left(\frac{v_1}{2}-1\right)}}{\left(1+\frac{v_1}{v_2}x\right)^{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}}\ ; & x>0\ \ et\ \ v_1,v_2\in\mathbb{N}\\ 0 & ,x\leq 0\end{cases}$	**توزيع فيشر** $\boldsymbol{X\sim F(v_1;v_2)}$