محاضرة رقم 1 و 2

2.1 الفضاء العيني:

يستعمل علم الإحصاء في إستقراء النتائج والمشاهدات والقياسات التي يسجلها الباحثون والعلماء نتيجة إجراء التجارب، وصياغة التعميمات عن المجتمع بعد دراسة عينة عشوائية، تؤخذ من ذلك المجتمع وتَستعمل نظرية الاحتمال في إعطاء التبريرات الرياضية للتوصل إلى هذه التعميمات من دراسة العينات, كما وأن هذه النظرية تساعد في تحديد مدى صدق تمثيل العينات للمجتمع ومدى الثقة في الإستدلال.

التجربة الإحصائية:

هي كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل حتمي، فمثلا عند رمي قطعة نقود فإن النتيجة تكون إما صورة وإما كتابة، وعند رمي زهرة نرد فإن الوجه الذي يظهر إلى أعلى يحمل أحد الأعداد الآتية: 1، 2، 3، 4، 5، 6 أي أن نتيجة التجربة لا تكون معروفة بشكل حتمي قبل إجراء التجربة.

1.2.1 الفضاء العيني أو فضاء العينة لتجربة إحصائية:

هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة، ويعبر عن الفضاء العيني بالرمز Ω أو LS وأي عنصر في فضاء العينة يسمى نقطة فضاء عينة.

مثال: أقذف قطعة نقود وأرم نرد مرة واحدة، ثم أكتب الفضاء العيني.

الحل: نرمز لوجه قطعة النقود الذي تظهر عليه الصورة بالحرف H والوجه الآخر وهو الكتابة بالحرف T.

من الواضح أن إحدى النتائج البسيطة هي ظهور الصورة على قطعة النقود والعدد 1 على زهرة النرد، وبذلك يكون (H,1) نتيجة بسيطة، أي عنصرا في الفضاء العيني. ولو حاولت أن تكتب جميع النتائج البسيطة التي يمكن الحصول عليها لوجدت أنها تمثل عناصر الفضاء العيني وهي:

$$S = \Omega = \{(H,1) , (H,2) , (H,3) , (H,4) , (H,5) , (H,6) , (T,1)\ (T,2) , (T,3) , (T,4) , (T,5) , (T,6) \}$$

في كثير من الأحيان يكون إهتمامك منصبا على بعض عناصر الفضاء العيني دون البعض الآخر، في هذه الحالة تكون مهتما بما يسمى "الحادث".

2.2.1 الحادث:

هو أي مجموعة جزئية لفضاء العينة S بشرط أن مجموعة S تكون منتهية، أي أنه مجموعة مكونة من نتيجة بسيطة واحدة أو أكثر، أو لا يحتوي على أي نتائج. فإذا إحتوى على نتيجة بسيطة واحدة سمي حادثا بسيطا، أمّا إذا إحتوى على نتيجتين أو أكثر فإنه يسمى حادثا مركبا.

مثال: الحادث {(H,1)} حادث بسيط

أما الحادث { (H,1) (T,2) , (H,6)} فهو حادث مركب

وتصنف الفضاءات العينية حسب عدد العناصر التي تحتويها، فإذا كان عدد هذه العناصر محدودا سمي الفضاء العيني فضاء عينيا محدودا.

مثال: إذا رميت زهرة نرد فإن الفضاء العيني يحتوي على 6 نقاط وبالتالي فإنه محدود.

3.2.1 فضاء العينة المنفصل:

يسمى الفضاء العيني فضاء منفصلا إذا كان محدودا أو لانهائيا معدودا، أي إذا كان محدودا أو إذا أمكن ربط عناصره واحدا إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة، كأن تقول أربط هذا العنصر مع العدد 1 وأربط عنصرا ثانيا مع العدد 2 وأربط عنصرا ثالثا مع العنصر 3 وهكذا إلى مالا نهاية.

مثال: أرم قطعة نقود على الأرض حتى تظهر صورة H إلى أعلى. في هذه الحالة قد ترمي قطعة النقود مرة واحدة فتحصل على صورة أو تضطر إلى رميها مرتين حتى تكون الأولى كتابة والثانية صورة فتتوقف، أو إلى رميها ثلاث مرات وتحصل على كتابة أولا ثم كتابة ثانيا ثم صورة في المرة الثالثة وهكذا، وبذلك يكون الفضاء العيني:

S = {(H, TH, TTH, TTTH, ... }

حيث H يمثل الصورة وT تمثل الكتابة. لاحظ أنك تستطيع ربط جميع عناصر S واحدا إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة، فربط (H) مع 1 و(TH) مع 2 و(TTH) مع 3 و(TTTH) مع 4 وهكذا.

تعريف: إذا كان S الفضاء العيني لتجربة ما، وكان A أي حادث في S، فإننا نعين لهذا الحادث عددا P(A) بحيث يحقق الفرضيات التالية:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(S) = 1$

3) إذا كان A_1 وA_2 حادثين منفصلين عن بعضهما البعض أي لا يوجد عناصر مشتركة بينهما فإن :

$$P(A_1 U A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

مثال: أفرض أن :$S = \{1, 2, 3\}$

وأفرض أن Ø هي المجموعة الخالية

وأن: $P(\{1\}) = P(\{2\}) = ¼\ ,\ P(\{Ø\}) = 0$

أحسب: $P(\{S\})\ ,\ P(\{3\})\ ,\ P(\{1,2\})\ ,\ P(\{1,3\})\ ,\ P(\{2,3\})$

الحل:

$P(\{S\}) = 1$

$P(\{1,2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = ¼ + ¼ = ½$

$P(\{3\}) = ½ = P(S) – P(\{1,2\})$

$P(\{1,3\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) = ¼ + ½ = ¾ = P(\{2,3\})$

P هو إفتران احتمال على S وذلك لأن الفرضيات الثلاثة في تعريف الاحتمال محققة.

لاحظ أن الفرضية الأولى تعني أن احتمال أي حادث يكون كسرا غير سالب، أي أنه عدد حقيقي بين الصفر والواحد.

أما الفرضية الثانية فتعني أن احتمال الحادث الأكيد (الفضاء العيني) يساوي واحد، أما الفرضية الثالثة فتعني أن احتمال إتحاد أي حادثين منفصلين عن بعضهما البعض هو حاصل جمع احتماليهما.

4.2.1 فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث:

إذا كان الفضاء العيني S لتجربة ما يحتوي على n من النقاط (أي أن عدد النتائج الممكنة لتجربة ما هو n) وكانت فرضية الحصول على أي نتيجة بسيطة تساوي فرضية الحصول على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال: الفضاء العيني S فيه n من النقط المتساوية إمكانية الحدوث، ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث بسيط آخر ويكون احتمال كل حادث بسيط مساويا لاحتمال أي حادث آخر.

فإذا فرضنا $S = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$

فإن الحوادث البسيطة المتساوية في الاحتمال هي$\{(b_1\},\{b_2\}, \ldots\ldots, \{b_n\}$

ويكون $P(\{b_1\}) = P(\{b_2\}) = \ldots\ldots = P(\{b_n\})$

وبما أن مجموع هذه القيم يساوي 1 فإنه يكون $P(\{b_i\}) = \frac{1}{n}$لجميع القيم$(i = 1,2,\ldots\ldots,n)$، ومن هذا نحصل على هذه النتيجة :

إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A) فإن احتمال هذا الحادث هو :

أي انه إذا احتوى الفضاء العيني على عدد محدود من النقط وكانت هذه النقط متساوية إمكانية الحدوث فإن احتمال أي حادث في الفضاء العيني المذكور يساوي نسبة عدد النقط في ذلك الحادث إلى عدد النقط في الفضاء العيني.