محاضرة رقم 3

قوانين الاحتمال:

يواجهنا في كثير من الأحيان تطبيقات على الاحتمالات نحتاج حيالها إلى حساب احتمالات الحوادث المركبة. ولتسهيل القيام بهذه المهمة نورد النظريات التالية:

نظرية (1): إذا رمزنا للحادث الخيالي بالحرف $\emptyset$ وكان P الاحتمال المعرف على S فإن $P(\emptyset) = 0$

لاحظ أن الحادث $\emptyset$ يعني عدم حدوث أية نتيجة من النتائج الممكنة في التجربة الإحصائية، ولذلك فإنه من المعقول أن نتفق على أن $P(\emptyset) = 0$.

نظرية (2): إذا كان A حادثا في S، $\bar{A}$ متممة ذلك الحادث فإن: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

أي ان احتمال حدوث الحادث A هو $P(A)$ فإن احتمال عدم حدوث A هو $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

مثال: إذا كان احتمال حصول طالب على بعثة يساوي 0,9 فما احتمال عدم حصوله على تلك البعثة؟

الحل: نفترض أن الحادث A يعني حصول الطالب على بعثة، فإن الحادث $\bar{A}$ يعني عدم حصول الطالب على البعثة.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.9 = 0.1$$

نظرية (3): إذا كان A و B حادثين في الفضاء العيني Sفإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: شب حريق في إحدى العمارات واتصل الحارس بمركزين من مراكز الإطفاء بالمدينة، فإذا كان احتمال وصول الإطفائية الأولى إلى مكان الحريق خلال دقيقتين يساوي 0,9، واحتمال وصول الإطفائية الثانية خلال دقيقتين يساوي 0,8 واحتمال وصول الإثنين معا خلال المدة نفسها يساوي 0,72. فما احتمال وصول الإطفائية الأولى أو الثانية خلال دقيقتين؟

الحل: أفرضA يمثل الحادث "وصول الإطفائية الأولى خلال دقيقتين".

أفرض B يمثل الحادث "وصول الإطفائية الثانية خلال دقيقتين".

وبالتالي $(A \cap B)$يمثل الحادث "وصول الإطفائيتين خلال دقيقتين".

إن احتمال وصول الإطفائية الأولى أو الثانية خلال دقيقتين هو احتمال إتحاد الحادثين A وB وباستعمال النظرية السابقة فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,9 + 0,8 - 0,72 = 0,98$$

الاحتمال المشروط:

إن دراسة الأحداث المشروطة تعني دراسة حدوث حادث معين إذا علم على تحقيق حدوث حادث آخر، وهذه دراسة تستلزم دراسة الاحتمال الشرطي الذي يعني دراسة احتمال حادث ما إذا علم حدوث حادث آخر.

مثال: إذا رميت زهرة نرد منتظمة وعلمت أن العدد على الوجه الظاهر كان زوجيا، فما احتمال أن يكون العدد على الوجه الظاهر هو 2؟

الحل: من الواضح إذا علمت أن العدد الظاهر على الوجه زوجي فهذا يعني أنك علمت حدوث ظهور العدد الزوجي وهذا يعني أن العدد الذي ظهر يجب أن يكون من المجموعة {2,4,6}.

الآن ما احتمال أن يكون العدد الظاهر 2؟

بما أن زهرة النرد منتظمة وعلمنا حدوث {2,4,6} فاحتمال ظهور 2 هو 3/1 فإذا عبرت بالرمز E للحادث "العدد الظاهر زوجي".

فيكون المطلوب احتمال ظهور العدد 2 إذا علمت أن العدد الظاهر زوجي.

هذا هو الاحتمال الشرطي ونعبر عنه بالرمز $P(\frac{\{2\}}{E})$

تعريف: الاحتمال الشرطي للحادث A إذا علم الحادث Bهو :

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;/\; P(B) > 0$$

مثال: رُميت قطعة نقود ثلاثة مرات، فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف H وظهور الكتابة بالحرف T وإذا علمنا أن الوجه في الرمية الأولى كان H، فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران $H\ H$؟

الحل: الفضاء العيني هو: $S = \{\begin{matrix} HHH, & HHT, & HTH, HTT \\ THH, & THT, & TTH, TTT \end{matrix}\}$

أفرض: A تمثل الحادث "الوجه في الرمية الأولى H"

B تمثل الحادث "الوجهان في الرميتان الأولى والثانية $H.H$"

والمطلوب $P(\frac{B}{A})$؟

من التعريف : $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

بالنظر إلى فضاء العينة Sفإن : $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

وذلك لأن في $(B \cap A)$ نقطة واحدة (HHH) وفي الفضاء العيني 8 نقاط.

وكذلك $P(A) = \frac{4}{8}$

لأن الحادث A = {HHH , HHT , HTH , HTT} أي فيه 4 نقاط.

إذن :

بالرجوع إلى التعريف السابق وبعد إجراء الضرب التبادلي نجد:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P\left(\frac{A}{B}\right) \text{ و } P(B \cap A) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$$

وكذلك: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ لأن العناصر المشتركة بين A وB هي نفسها العناصر المشتركة بين B وA ولذلك نحصل على النظرية التالية:

نظرية قاعدة الضرب:

$$P(B \cap A) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right) \; / \; P(A) > 0$$

أو $P(A \cap B) = P(B) \times P\left(\frac{A}{B}\right) \; / \; P(B) > 0$

وهذه النظرية تعطيك قاعدة الضرب في حالة الأحداث المشروطة.

مثال: إذا كان *P(A) = 0,6*، *P(B) = 0,3* وكان $P\left(\frac{A}{B}\right)$

أوجد: $P(A \cap B)$ و $P\left(\frac{B}{A}\right)$

الحل: من قاعدة الضربمن تعريف الاحتمال الشرطي:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,12}{0,6} = 0,2$$

الحوادث المستقلة:

تعريف: يكون الحادثان Aو B مستقلين إذا كان:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \implies P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$$

والعكس صحيح.

مثال: إذا كان A و B مستقلين وكان $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,6$ أوجد $P(A \cap B)$ ؟

الحل: بما أن الحادثين مستقلان إذن:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0,4 \times 0,6 = 0,24$$

مثال: في مدينة ما إطفائيتان تعملان مستقلتين عن بعضهما البعض، احتمال وصول الأولى إلى مكان الحريق خلال خمس دقائق 0,95 واحتمال وصول الثانية إلى المكان خلال المدة نفسها يساوي 0,90، ما احتمال وصول الإطفائيتين إلى مكان الحريق خلال خمسة دقائق؟

الحل: أفرض A يمثل وصول الإطفائية الأولى خلال خمسة دقائق.

أفرض B يمثل وصول الإطفائية الثانية خلال خمسة دقائق.

وبما أن الإطفائيتان مستقلتان عن بعضهما البعض، إذن احتمال وصول الإطفائيتين إلى مكان الحريق يساوي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= 095 \times 0,90$$

=0,855