محاضرة رقم 4 و 5

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية:

I. المتغيرات العشوائية :

عند إجراء التجارب الاحصائية وتعيين فضاء العينة لأي منها، ربما لا يكون من الضروري أو المهم دراسة نقاط فضاء العينة بالتفصيل، وبعبارة أخرى لا يكون اهتمامنا منصبا على النتائج الممكنة في حدّ ذاتها ولكن ينصب اهتمامنا على قيم عددية مرتبطة بهذه النتائج الممكنة.

إن القيم العددية هذه هي ما نعبر عنه بقيم المتغير العشوائي، ولذا نعطي التعريف

نعريف (1): المتغير العشوائي هو اقتران حقيقي (دالة حقيقية) يعرف على فضاء العينة S أي أن المتغير العشوائي هو اقتران مجال تعريفه فضاء العينة ومداه مجموعة جزئية من مجموعة العداد الحقيقية.

مثال: إذا رمية قطعة نقود متزنة 3 مرات فإن فضاء العينة يكون:

S = {HHH , HHT, HTH , HTT , THH , THT , TTH , TTT}

أفرض أن X عدد ظهور H

بالنظر إلى فضاء العينة S نرى بأن القيم التي يأخذها X هي 0، 1، 2، 3 وبهذا فإن X متغير عشوائي مجال تعريفه S ومداه المجموعة {3 ,2 ,1 ,0}، ونرى أن كل نقطة فضاء عينة ارتبطت بقيمة حقيقية واحدة فقط.

بالنظر إلى التجربة السابقة أفرض اهتمامنا منصب على معرفة الفرق المطلق بين عددH وعددT، ولذا نفرض أن:

Y = القيمة المطلقة للفرق بين عددH وعددT، نلاحظ أن Yإقتران حقيقي معرف على S ومداه المجموعة {1,3} حيث أن قيمة Y عند النقطة HHH هي 3 وهي نفس القيمة عند النقطة TTT. أما قيمة Y عند باقي النقاط فهي 1.

الآن ما احتمال X تساوي 1 ؟ وما احتمال Y تساوي 3 (Y=3) ؟

نرى أن احتمال X=1 هو $\frac{3}{8}$ وذلك بالرجوع إلى فضاء العينة وعدد النقاط التي أدت إلى حصول X=1

فكانت هذه النقاط :THT، HTT، TTH واحتمال حدوثها $\frac{3}{8}$

ولهذا نكتب :

P(X=1) = (X احتمال (جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 1 تحت تأثير

$$= P(\{TTH , HTT , THT\}) = \frac{3}{8}$$

احتمال (جميع نقاط فضاء العينة التي ارتبطت بالعدد 3 تحت تأثير Y) = P(Y=3)

$= P(\{TTT , HHH\}) = \frac{1}{4}$

وبنفس الطريقة نجد أن : $P(Y = 1) = \frac{3}{}$

التوزيعات الإحتمالية المنفصلة:

إذا كان مدى المتغير العشوائي X مجموعة ذات عدد محدود من القيم أو مجموعة معدودة، نقول إن X متغير عشوائي منفصل. وهذا يعني أنه إذا كانت مجموعة الأعداد التي يأخذها X باحتمال موجب ذات عدد محدود أو مجموعة معدودة فإن X يعتبر متغيرا عشوائيا منفصلا.

إن المتغيرات العشوائية في المثال السابق متغيرات عشوائية منفصلة، ويمكننا كتابة جدول يبين قيم المتغير العشوائي واحتمال كل قيمة.

جدول (1)

قيمة X	0	1	2	3
P(X=x)	1/8	3/8	3/8	1/8

جدول (2)

قيمة Y	1	3
P(Y=y)	3/4	1/4

تعريف (2) : كل جدول أو معادلة تعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعا احتماليا منفصلا.

1.II نظرية ذات الحدين:

في كثير من التجارب تكون نتيجة كل محاولة التجربة أحد الأمرين، إما نجاح وإما فشل، وتتألف هذه التجارب من تكرار وإعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض. فمثلا عند رمي قطعة نقود فإن النتيجة تكون إما ظهور الصورة أو ظهور الكتابة، وتكون نتيجة أي محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى. فإذا كانت نتيجة المحاولة الأولى ظهور الصورة إلى أعلى فإن ذلك لا يؤثر في نتيجة المحاولة الثانية وهكذا. إن هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي(Beμnoulli).

تعريف (3) : محاولات بيرنوللي كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاول بيرنوللي

1. نتيجة كل محاولة أن ناتجين، تسمى أحدهما "نجاحا" والأخرى "فشلا".
2. نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة أي محاولة أخرى.
3. احتمال النجاح في كل محاولة ثابت وليكن P ولذلك فاحتمال الفشل ثابت وهو: q=1-P

إن المحاولات التي تعطي أحد ناتجين فقط، إما "نجاح" وإما "فشل" تحدث في حالات أخذ العينات من المجتمعات التي تكون عناصرها مصنفة إلى صنفين نجاح و فشل.

ومن الأمثلة على ذلك:

أ. فحص مجموعة من طلاب لمعرفة نسبة من يحتاج إلى استعمال نظارة طبية.
ب. فحص سجلات الولادة في أحد المستشفيات لمعرفة نسبة الولادات بالعملية القسصرية.
ج. إذا كان لديك مجموعة من المصابيح الكهربائية وأردت فحصها واحدا تلو الآخر.

إن كل محاولة هي محاول بيرنوللي لأنها تحقق الشروط الثلاثة المذكورة آنفا.

إذا فرضنا أن X هو نتيجة محاول بيرنوللي التي احتمال النجاح فيها P وإذا فرضنا X=1 إذا كانت النتيجة "نجاحا"، و X=0 إذا كانت النتيجة "فشلا"، فإننا نحصل على التوزيع الاحتمالي للمتغير X كما في الجدول (3)

x	f(x) = P(X=x)
1	P
0	1-P

والآن إذا كررت محاولة بيرنوللي عددا ثابتا من المرات وليكن n فإننا نحصل على تجربة ذات الحدين، أي أن تجربة ذات الحدين هي كل تجربة تحقق الشروط الثلاثة لتجربة بيرنوللي بالإضافة إلى الشرط الرابع وهو أن تجري محاولات بيرنوللي عددا ثابتا n.

تعريف (4): إذا أجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال "النجاح" في المحاولة الواحدة P وكان x يمثل عدد "النجاح في المحاولات كلها فإن :

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ونمثله بالرمز b(x ;n ;P) وبذلك يكون لدينا:

b(x;

مثال: رميت قطعة نقد متزنة 4 مرات

جد التوزيع الاحتمالي لعدد ظهور الصورة في هذه التجربة؟

الحل: إن هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث n=4 ، P=1/2.

وبوضع X= عدد ظهور الصورة في المحاولات الأربع. ومن التعريف الأخير نجد:

$$b\left(x;4;\frac{1}{2}\right) = P(X=x) = \binom{4}{x}\frac{1^{x}}{2}.\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-x} ; \qquad x = 0,1,2,3,4$$

$$= \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} ; \qquad x = 0,1,2,3,4$$

$$= \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} ; \qquad x = 0,1,2,3,4$$

*فلو حسبت هذه القيم*b(x ;4 ;1/2)*لقيم* x المختلفة لوجدت:

$$b\left(0;4;\frac{1}{2}\right) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

X=0 عدد ظهور H في الرميات الأربع :

X=1 عدد ظهور H مرة واحدة من الرميات الأربع: $b\left(1;4;\frac{1}{2}\right)=\binom{4}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

4

X=2 عدد ظهور H مرتين من الرميات الأربع : $b\left(2;4;\frac{1}{2}\right)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

6

X=3 عدد ظهور H ثلاثة مرات من الرميات الأربع: $b\left(3;4;\frac{1}{2}\right)=\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

4

X=4 عدد ظهور H أربعة مرات من الرميات الأربع: $b\left(4;4;\frac{1}{2}\right)=\binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

1

من الواضح أن كل قيمة هي كسر ما بين الصفر وواحد ومجموعها يساوي 1 أي أن:

مثال: رميت زهرة نرد منتظمة 3 مرات، ما احتمال عدم ظهور العدد 1 فيها؟

وما احتمال ظهور العدد 1 مرتين؟

الحل: عند رمي زهرة الرند مرة واحدة فإن الفضاء العيني *S={1,2,3,4,5,6}* واحتمال ظهور واحد يساوي 6/1 وعدم ظهور واحد يساوي 6/5.

إن هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث:

ضع X عدد ظهور العدد 1 في المحاولات الثلاثة وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير X يكون:

إن عدم ظهور 1 يعني X=0 ولذلك:

وظهور 1 مرتين يعني X=2 ولذلك:

2.II توزيع بواسونDistµibution Poisson

إن تجربة بواسون هي كل تجربة تحقق الشروط الآتية:

1. معدل عدد النجاحات λ التي تحدث في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة معلوم.
2. احتمال حدوث نجاح واحد في فترة زمنية قصيرة أو منطقة صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة أو مساحة تلك المنطقة.
3. احتمال حدوث نجاحين أو اكثر في الفترة الزمنية القصيرة أو المنطقة الصغيرة مهمل.
4. إذا اعتبرنا عدد فترات زمنية منفصلة عن بعضها البعض فإن حدوث النجاحات في أي فترة مستقل عن حدوث النجاحات في أي فترة أخرى.

يعتبر عدد النجاحات X في تجربة بواسون متغير عشوائي بواسون، وتمثل اقترانه الاحتمالي بالاقتران $P(x,\lambda)$

تعريف (5): التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسونX الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة أو منطقة محددة هو :

$$\mathrm{P}(x,\lambda) = P(X = x)$$

$$= \frac{e^{-x}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \quad x = 0,1,2, \dots \dots / e = 2,7182 \dots$$

حيث λ هي معدل عدد النجاحات في الفترة الزمنية المعينة أو المنطقة المحددة.

مثال: معدل عدد حوادث السيارات على طريق صحراوي 5 في الأسبوع.

ما احتمال عدم حدوث أي حادث على ذلك الطريق في أسبوع معين؟

وما احتمال حدوث 4 حوادث أو أقل في أسبوع معين؟

الحل: $\lambda = 5$، X = عدد الحوادث في أسبوع.

$$\mathrm{P(X = 0) = P(x, 5) = \frac{e^{-5}5^{0}}{0!} = e^{-5}}$$

$$\mathrm{P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)}$$

$$= \sum_{\mathrm{x=0}}^{4} \mathrm{P(x; 5)} = \sum_{\mathrm{x=0}}^{4} \frac{\mathrm{e^{-5}5^{x}}}{\mathrm{x!}}$$

$$= \frac{\mathrm{e^{-5}5^{0}}}{0!} + \frac{\mathrm{e^{-5}5^{1}}}{1!} + \frac{\mathrm{e^{-5}5^{2}}}{2!} + \frac{\mathrm{e^{-5}5^{3}}}{3!} + \frac{\mathrm{e^{-5}5^{4}}}{4!}$$

$$= \mathrm{e^{-5}}\left(1 + 5 + \frac{25}{2} + \frac{125}{6} + \frac{625}{24}\right) = 0{,}44049$$