محاضرة رقم 6 و 7

I. التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

ترتبط هذه التوزيعات بالمتغيرات العشوائية المتصلة حيث أن التوزيع هنا بمثابة دالة لمتغير عشوائي متصل يتضمن قياسا ويتم تمثيله بيانيا إما باستخدام المدرج التكراري أو المضلع التكراري.

إن المنحنى الذي يمثل توزيعا نظريا ما يمكن النظر إليه كصورة نهائية للمدرج التكراري عند تكرار المعاينة مرات عديدة، إذ تكون له الخواص التكرارية الرئيسية للمدرج، فالمساحة الواقعة تحت المدرج التكراري على الدوام مساوية للواحد.

III.1 التوزيع الطبيعي: يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية، ذلك لأنه يمثل الكثير من الظواهر الحياتية، كما أن الكثير من التوزيعات المهمة تشتق منه أو تؤول إليه في حالات معينة، أدى ذلك لأن يكون لذلك التوزيع تطبيقات متعددة. والتوزيع الطبيعي هو التوزيع المناسب للظواهر التي تحدث فيها القيم الكبيرة جدا والصغيرة جدا باحتمالات صغيرة، وتتمركز معظم قيمه في وسط التوزيع بحيث يكون شكله النهائي جرسيا.

أمثلة للتوزيع الطبيعي:

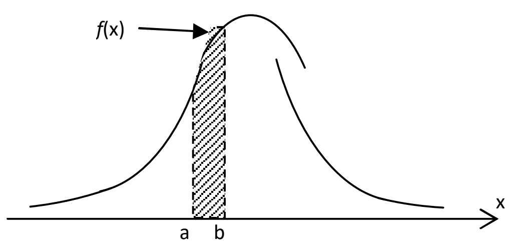
- **الإحصاءات البيولوجية:** لو حسبت نسبة المواليد الذكور إلى الإناث في منطقة محددة ولعدد من السنين لوجدت أن توزيع هذه النسبة يتبع توزيعا شبيها بالتوزيع الطبيعي.
- **المقاييس العضوية:** فالطول والوزن ممثلا لمجموعة أفراد لهم نفس السن والجنس والبيئة موزعة توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي.
- **الظواهر الإجتماعية:** مثل الدخل أو الأجر أو مستوى الإنتاج الصناعي لعمال بظروف مماثلة، أو نسبة الزواج والطلاق في ظروف عادية محددة، كلها تتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي.
- **المقاييس النفسية والتعليمية:** كالذكاء حسب نتائج اختبارات الذكاء المقننة ونتائج اختبارات القدرات وسرعة الربط ونتائج الاختبارات التحصيلية المختلفة تتوزع توزيعا قريبا من التوزيع الطبيعي.
- **أخطاء التقدير والملاحظة:** إن الأطوال والصفات العضوية أو النفسية أو الاجتماعية المبنية على التقديرات الشخصية تحتوي على أخطاء قد تجعلها تزيد أو تنقص عن قيمتها الحقيقية وتكون هذه الانحرافات عن القيم الحقيقية عادة موزعة توزيعا طبيعيا، حيث يكون نصفها سالبا يجعل التقدير الشخصي أقل من القيم الواقعية ونصفها موجبا يزيد التقدير الشخصي عن القيم الحقيقية وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للتوزيع الطبيعي الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\mu^2}} \ / \ -\infty < x < +\infty$$

حيث :μ هي معدل التوزيع

σ^2 هي تبانية و $3,14159.... = \pi$ و $2,71828.... = e$

واحتمال الحادث x تقع بين النقطتين a و b هو:



$P(a < x < b)$ = مساحة الجزء المظلل

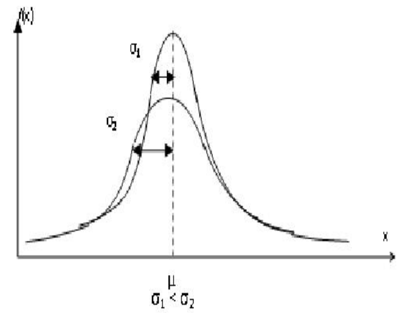
وتستعمل هذه المعادلة في رسم منحنى التوزيع الطبيعي

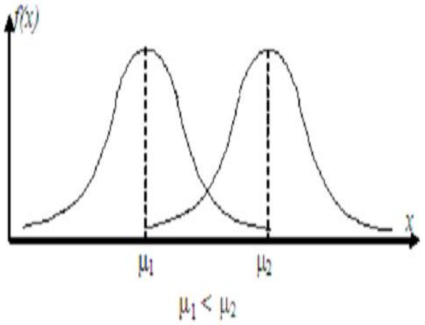
الذي يشبه شكل الجرس وهو متماثل حول العمود المقام على النقطة $x=\mu$ ويتقارب من الصفر على الجهتين عندما $x\rightarrow-\infty$ وعندما $x\rightarrow+\infty$

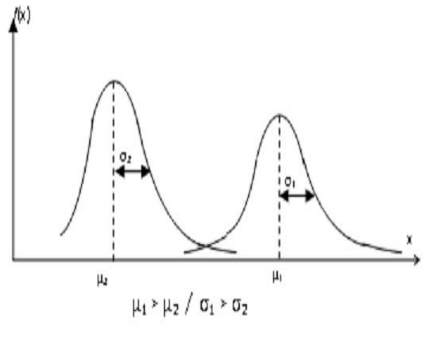
أما μ فتعين مركز التوزيع ولا تعين انحرافه المعياري أي أحد مقاييس التغير، فإذا تحركت μ إلى اليمين أو اليسار ينتقل مركز التوزيع ولا يتغير شكل المنحنى.

أما إذا تغيرت σ وبقيت μ نفسها فإن تشتت وتباعد المنحنى حول المركز يقل كلما صغرت σ، أما إذا تغيرت μوσ فإن مركز التوزيع يتغير، وتباعد منحناه حول المركز يتغير كذلك.

الأشكال الآتية تظهر لنا تأثر المنحنى باختلاف μوσ :







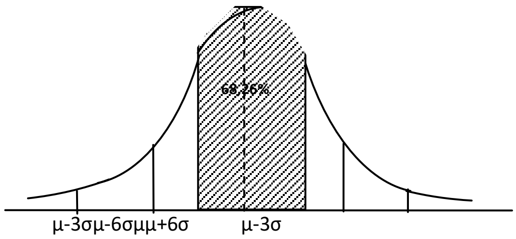
خواص التوزيع الطبيعي:

1. التوزيع الطبيعي متماثل حول العمود المقام على الوسط μ وشكله يشبه شكل الجرس.
2. للتوزيع الطبيعي قمة واحدة وبذلك فله منوال واحد ينطبق على الوسط μ.
3. يتقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندما $x\rightarrow-\infty$ و$x\rightarrow+\infty$.
4. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1.
5. هناك نسبة معينة من المساحة الواقعة ضمن أي عدد من الانحرافات المعيارية عن الوسط، كما في التوضيحات التالية:

- المساحة ضمن انحراف معياري واحد عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu-\sigma ,\mu+\sigma)$ وتساوي 68,26% من المساحة الكلية.

- المساحة ضمن انحرافين معياريين عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu-2\sigma ,\mu+2\sigma)$ وتساوي 95,44% من المساحة الكلية.
- المساحة ضمن ثلاثة انحرافات معيارية عن الوسط = المساحة الواقعة على الفترة $(\mu-3\sigma ,\mu+3\sigma)$ وتساوي 99,74% من المساحة الكلية.

والشكل الآتي يوضح ذلك:



التوزيع الطبيعي المعياري:

يعرف التوزيع الطبيعي المعياري بأنه التوزيع الطبيعي الذي وسطه صفر وتباينه 1، أي أن المتغير العشوائي Z يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري إذا كان توزيع Z التوزيع الطبيعي ذا الوسط $\sigma^2=1$ و$\mu=0$ ونعبر عنه بالرمز $Z:N(0,1)$

وإذا كان x يخضع للتوزيع الطبيعي ذي الوسط μ والتباين σ^2 أي إذا كان $X:N(\mu,\sigma^2)$ فإن المتغير Z الذي نحصل عليه من التحويل $Z=(X-\mu)/\sigma$ يكون توزيعه التوزيع الطبيعي المعياري وكل قيمة من قيم x يقابلها قيمة من قيم Z تسمى القيمة المعيارية.

فمثلا إذا كان x يخضع للتوزيع الطبيعي ذي $\mu=70$ و $\sigma^2=25$ فإن $Z=(x-70)/5$

يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري، والقيمة المعيارية لـ $x=81$ هي $z=(81-70)/5 = 2.2$

وقيمة x التي تقابلها القيمة المعيارية $z=1,5$ نحصل عليها من المعادلة :

المساحات تحت التوزيع الطبيعي:

بما أن الوسط μ والتباين σ^2 يحددان التوزيع الطبيعي فإن المساحة التي على أي فترة تحت التوزيع الطبيعي تعتمد على μ وσ^2 وبالتالي لا يمكن وضع جداول لجميع قيم μ وσ ولذلك نعمد في حساب المساحات تحت التوزيع الطبيعي على تحويله إلى توزيع طبيعي معياري ومن ثم نجد المساحة المطلوبة من جداول التوزيع الطبيعي المعياري.

هناك عدة طرق لعرض جدول التوزيع الطبيعي المعياري إلاّ أنها متكافئة ونستعمل هنا الجدول الذي يعطي المساحة بين الصفر وقيمة z الموجبة أي الجدول الذي يعطي $P(0<Z<z)$ (أنظر الجدول المرفق مع المحاضرة).

ولذلك فعند حساب احتمال أي حادث لابد من وضع ذلك الحادث بالصيغة السابقة والاستفادة من رسم الشكل المطلوب ومن تماثل منحنى التوزيع الطبيعي ومن كون المساحة تحت المنحنى تساوي 1.

مثال (1): إذا كان $Z:N(0,1)$ أحسب:

1) $P(0 < Z < 1) =$
2) $P(0 < Z < 2,12) =$
3) $P(Z > 1) =$
4) $P(Z < -1) =$
5) $P(-2 < Z < 1,5) =$
6) $P(1 < Z < 2) =$

مثال (2): إذا كان $X=N(60,16)$ أحسب:

1) $P(X > 65) =$
2) $P(55 < X < 67) =$