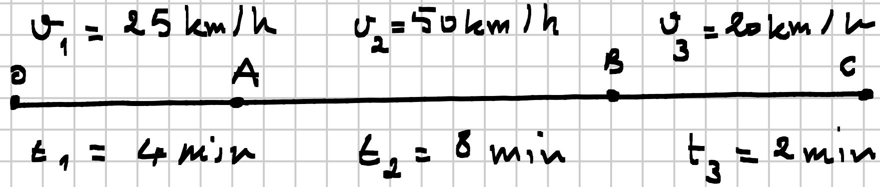
Correction TD n° 03 — 2022/2023 — ①

Exercice 01 :

I /



- $1^{ère}$ phase : OA :

  $v_1 = 25\ km/h$, $t_1 = 4\ min$

- $2^{ème}$ phase : AB

  $v_2 = 8\ min$; $t_2 = 8\ min$

- $3^{ème}$ phase : BC

  $v_3 = 20\ km/h$, $t_3 = 2\ min$

La vitesse moyenne (non pas vecteur vitesse)

$$\langle v \rangle = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temp de parcours}}$$

La distance parcourue : $d = d_1 + d_2 + d_3$

$$d_1 = v_1 t_1 = (25\ km/h)(h/60\,min)(4\ min) = 5/3\ km$$

$$d_2 = v_2 t_2 = (50\ km/h)(h/60\,min)(8\ min) = 20/3\ km$$

$$d_3 = v_3 t_3 = (20\,km/h)\left(\frac{h}{60\,mn}\right)(2\,min) = 2/_3\,km$$

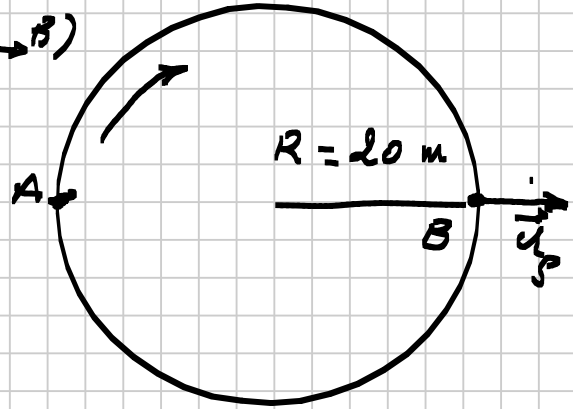
$$d = (5/_3 + 20/_3 + 2/_3) = 9\,km \Rightarrow \langle v \rangle = (9\,km)/14\,min \cdot \left(\frac{60\,s}{min}\right) = 10{,}71$$

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 4 + 8 + 2 = 14\,min$$

$$\langle v \rangle = 10{,}71\,m/s$$

II/

Un coureur fait 1,5 fois la piste circulaire ($A \to B$) pendant $t = 50\,s$



* La vitesse moyenne : $\langle v \rangle = \dfrac{\text{distance du parcours}}{\text{temps du parcours}}$

La distance parcourue est = $d = 1{,}5\,(2\pi R)$ pendant le temps $t = 50\,s$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = v_{moy} = \frac{d}{t} = \frac{1{,}5 \cdot 2\pi \cdot R}{50} = 3{,}78\,m/s$$

$$\langle v \rangle = 3{,}78\,m/s$$

* Le vecteur vitesse moyen $\langle \vec{v} \rangle = \dfrac{\text{déplacement}}{\text{temps écoulé}}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = AB\,\vec{u}_s = 2R\,\vec{u}_s = 40\,m$$

$$\Rightarrow \langle \vec{v} \rangle = \Delta\vec{r}/\Delta t = \frac{40\,m}{50\,s}\,\vec{u}_s = 0{,}8\,m/s\,\vec{u}_s \Rightarrow |\vec{v}_{moy}| = 0{,}8\,m/s$$

III / $x = 3(t^3 - 9t^2 + 15t)$ m

1°/ Les phases du mouvement : pendant l'intervalle de $t = [0, 6]$

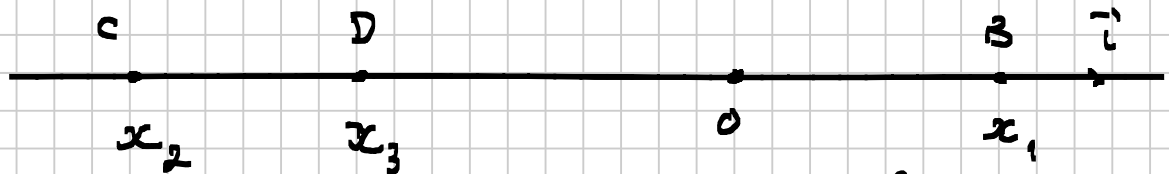
- est-ce que la particule s'arrête ?

on doit calculer sa vitesse et l'annuler.

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3(t^3 - 9t^2 + 15t)\right) = 9(t^2 - 6t + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 1s \; ; \; t_2 = 5s$$

La particule s'arrête en deux instant et change de sens du m^{vt}



$1^{ère}$ phase : elle part de "O" d'abscisse $x_0 = 0$ et s'arrête au point B d'abscisse $x_B = x_1$: au moment où $t = t_1 = 1s$

$$\Rightarrow x_1 = x(1) = 3\left[(1)^3 - 9(1)^2 + 15(1)\right] = 21\,m$$

$2^{ème}$ phase : elle part de "$x_1 = 21\,m$" et s'arrête au moment $t = t_2 = 5s$ après avoir changé de sens en B et arrive sur "C" d'abscisse $x_C = x_2 = x(5)$

$$\Rightarrow x(5) = 3\left[(5)^3 - 9(5)^2 + 15(5)\right] = -75\,m$$

$3^{ème}$ phase : elle part de x_2 après avoir changé sa direction, et sera au point "D" à l'instant où $t = 6s$ dont l'abscisse est $x_3 = x_D = x(6)$

$$\Rightarrow \quad x(6) = 3\left[(6)^3 - 9(6)^2 + 15(6)\right] = -54\,m$$

2°/ La distance traversée pendant les 6 secondes.

$$d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| \quad , \quad \Delta x = x_f - x_i \quad \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_1 = x_1 - x_0 = 21 - 0 = 21\,m \\ \Delta x_2 = x_2 - x_1 = -75 - 21 = -96\,m \\ \Delta x_3 = x_3 - x_2 = -54 + 75 = 21\,m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad d = 21 + 96 + 21 = 138\,m$$

$$d = 138\,m$$

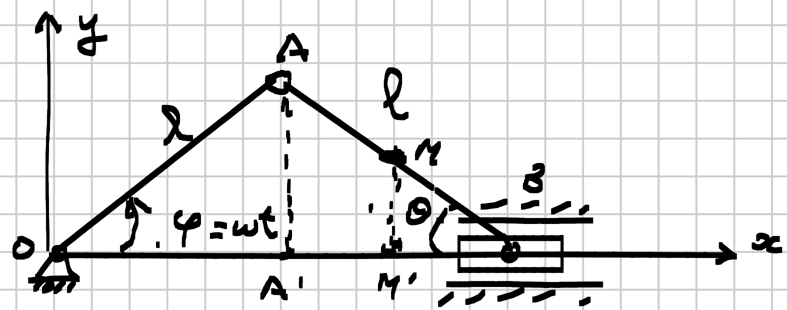
3°/ Le déplacement pour cette même durée

$$\Delta x = x_f - x_i = -54 - 0 = -54\,m$$

$$\Delta x = -54\,m$$

Exercice : 03

Système bielle - manivelle



1°/ ⓐ La manivelle OA execute un mouvement de rotation avec une vitesse angulaire ω = constante

dans la base cartésienne, $\vec{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$

ou $x_A = l \cos\varphi = l \cos(\omega t)$

$y_A = l \sin\varphi = l \sin(\omega t) \Rightarrow \vec{OA} = l\left(\cos\omega t\, \vec{i} + \sin\omega t\, \vec{j}\right)$

$\varphi = \omega t$

$x_A^2 = l^2 \cos^2\omega t$

$y_A^2 = l^2 \sin^2\omega t$

$\Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = l^2(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = l$

donc : $x_A^2 + y_A^2 = l^2 \Rightarrow$ le point "A" à une trajectoire circulaire de rayon $R = l$. A : execute un mouvement circulaire

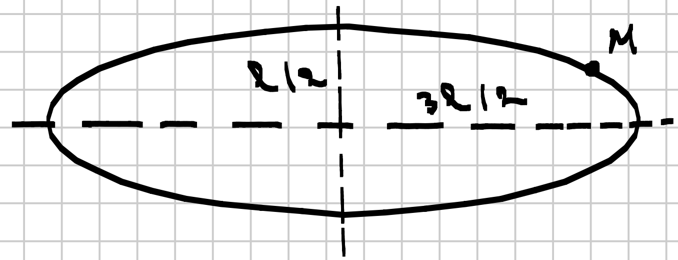
* La bielle execute un mouvement plan

Le point "M" : milieu de AB, est à la position OM /

$\vec{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$ ou $\begin{cases} x_M = OA' + A'M' = l\cos\omega t + \frac{l}{2}\cos\theta \\ y_M = MM' = \frac{l}{2}\sin\omega t \end{cases}$

puisque $OA = OB \Rightarrow$ OAB triangle isocèle : $\theta = \varphi = \omega t$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = l\cos\omega t + \frac{l}{2}\cos\omega t = \frac{3l}{2}\cos\omega t \\ y_M = \frac{l}{2}\sin\omega t \end{cases}$$



on a : $x_M^2 / \left(\frac{3l}{2}\right)^2 = \cos^2\omega t$ et $y_M^2 / (l/2)^2 = \sin^2\omega t$

$$\Rightarrow \frac{x_M^2}{(9l^2/4)} + \frac{y_M^2}{(l^2/4)} = 1$$

équation de la trajectoire : qui est une ellipse droite de demi-axes $\frac{3l}{2}$ et $\frac{l}{2}$

$\Rightarrow$ Le point "M" exécute un mouvement curviligne

* Le coulisseau B" se déplace seulement suivant $\vec{ox}$.

Le vecteur position de B est : $\vec{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$ ou $\begin{cases} x_B = OA' + A'B \\ y_B = 0 \end{cases}$

$OA' = l\cos\omega t$

$A'B = l\cos\theta$

$\theta = \varphi \Rightarrow x_B = 2l\cos\omega t$

"

$\Rightarrow$ La trajectoire du point B est une droite

B : à un mouvement rectiligne

2°/ Les expressions des vecteurs vitesse de A, M et B

D'après la définition générale, le vecteur vitesse est : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ où $\vec{r}$ est le vecteur position

- Pour A : $\vec{OA} = \vec{r}_A = l\cos\omega t\,\vec{i} + l\sin\omega t\,\vec{j}$

$\Rightarrow \vec{v}_A = \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left[l\cos\omega t\,\vec{i} + l\sin\omega t\,\vec{j}\right]$ $(\vec{i},\vec{j})$: base fixe $\Rightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = 0$

$$\vec{v}_A = l\omega\left(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}\right)$$

$\vec{v}_A = v_{Ax}\,\vec{i} + v_{Ay}\,\vec{j}$ où $v_{Ax} = -l\omega\sin\omega t$, $v_{Ay} = l\omega\cos\omega t$

le module de la vitesse est : $v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2}$

$\Rightarrow v_A = \left(l^2\omega^2\sin^2\omega t + l^2\omega^2\cos^2\omega t\right)^{1/2} = \left[l^2\omega^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)\right]^{1/2}$

$$v_A = l\omega \quad m/s$$

- Pour M : $\vec{OM} = \vec{r}_M = \frac{3\ell}{2}\cos\omega t\,\vec{i} + \frac{\ell}{2}\sin\omega t\,\vec{j}$

$$\Rightarrow \vec{v}_M = \frac{d}{dt}\left[\frac{3\ell}{2}\cos\omega t\,\vec{i} + \frac{\ell}{2}\sin\omega t\,\vec{j}\right] = \frac{\ell\omega}{2}\left[-3\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}\right]$$

$$\vec{v}_M = \frac{\ell\omega}{2}\left(-3\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}\right) \quad ; \quad \vec{v}_M = v_{Mx}\vec{i} + v_{My}\vec{j}$$

$$\Rightarrow v_M = \left[\ell^2\frac{\omega^2}{4}\left(9\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right)\right]^{1/2}$$

or $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$

$\Rightarrow \cos^2\omega t = 1 - \sin^2\omega t$

$$v_M = \frac{\ell\omega}{2}\left(1 + 8\sin^2\omega t\right)^{1/2}$$

- Pour B : $\vec{OB} = \vec{r}_B = 2\ell\cos\omega t\,\vec{i}$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = -2\ell\omega\sin\omega t\,\vec{i}$$

$$v_B = 2\ell\omega\sin\omega t$$

3°/ D'après la définition l'accélération est : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

- Pour A : $\vec{v}_A = l\omega\,[-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}]$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \frac{d}{dt}\left[l\omega\left(-\sin\omega t\,\vec{i} + \cos\omega t\,\vec{j}\right)\right] = -l\omega^2\left(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_A = -l\omega^2\left(\cos\omega t\,\vec{i} + \sin\omega t\,\vec{j}\right) = a_{Ax}\,\vec{i} + a_{Ay}\,\vec{j}$$

le module : $|\vec{a}_A| = a_A = \sqrt{a_{Ax}^2 + a_{Ay}^2}$ $\Rightarrow a_A = \left(l^2\omega^4\cos^2\omega t + l^2\omega^4\sin^2\omega t\right)^{1/2}$

$$\Rightarrow a_A = l\omega^2 \text{ m/s}^2$$

- Pour M

$$\vec{v}_M = \frac{l\omega^2}{2}\left(-3\cos\omega t\,\vec{i} - \sin\omega t\,\vec{j}\right) = a_{Mx}\,\vec{i} + a_{My}\,\vec{j}$$

$$v_M = \sqrt{\frac{l^2\omega^4}{4}\left(9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)} = \frac{l\omega^2}{2}\left(1 + 8\cos^2\omega t\right)^{1/2}$$

$$v_M = \frac{l\omega^2}{2}\left(1 + 8\cos^2\omega t\right)^{1/2}$$

- Pour B : $\vec{v}_B = -2l\omega\sin\omega t\,\vec{i} \Rightarrow \vec{a}_B = \frac{d}{dt}\left(-2l\omega\sin\omega t\,\vec{i}\right)$

$$\vec{a}_B = 2l\omega^2\cos\omega t$$

4°/ Le mouvement est central si son vecteur accélération est toujours orienté vers un point dit central.

c.a.d. $\vec{a} = \alpha \vec{r}$

A : $\vec{r}_A = l \cos\omega t \,\vec{i} + l \omega \sin \omega t \,\vec{j}$; $\vec{a}_A = -l\omega^2 (\cos\omega t \,\vec{i} + \sin\omega t \,\vec{j})$

$\Rightarrow$ $\vec{r}_A = -\omega^2 \vec{r}_A$ (point central est "O")

M : $\vec{r}_M = \frac{l}{2}(3\cos\omega t \,\vec{i} + \sin\omega t \,\vec{j})$; $\vec{a}_M = -\frac{l\omega^2}{2}(3\cos\omega t \,\vec{i} + \sin\omega t \,\vec{j})$

$\Rightarrow$ $\vec{a}_M = -\omega^2 \vec{r}_M$

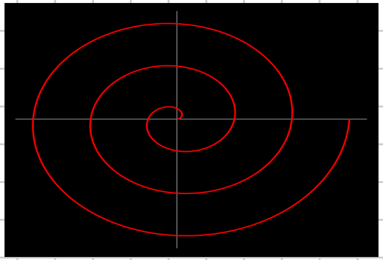
<u>Exercice 04</u> :

Dans la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$, on donne :

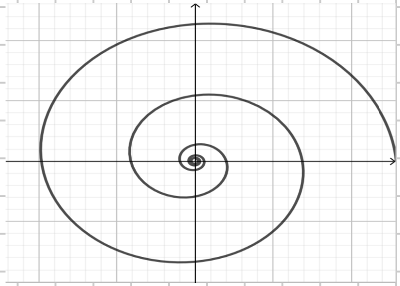
$\rho = \alpha e^{\beta t}$ et $\theta = \beta t$

1°/ . $\rho = \alpha e^{\beta t} = \alpha e^{\theta} \Rightarrow \rho = f(\theta) = \alpha e^{\theta}$

La trajectoire est une spirale



spirale $\beta > 0$ convergente



spirale divergente $\beta < 0$

2°/ vecteur vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ or $\vec{r} = \rho \vec{u}_\rho \Rightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

on a : $\begin{cases} \dot{\rho} = \dfrac{d}{dt}(\alpha e^{\beta t}) = \alpha\beta e^{\beta t} = \beta\rho \\ \dot{\theta} = \dfrac{d}{dt}(\beta t) = \beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \beta\rho(\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta)}$

$\vec{v} = v_\rho \vec{u}_\rho + v_\theta \vec{u}_\theta$ ou $v_\rho = \beta\rho$; $v_\theta = \beta\rho$

$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\beta^2\rho^2 + \beta^2\rho^2}$ ∴ $\boxed{v = \sqrt{2}\,\beta\rho \text{ m/s}}$

• L'accélération : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt}$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$, $\ddot{\rho} = \beta^2\rho$, $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\rho} = \beta\rho$, $\dot{\theta} = \beta$

$\vec{a} = (\beta^2\rho - \rho\beta^2)\vec{u}_\rho + (2\beta\rho\cdot\beta + \rho\cdot 0)\vec{u}_\theta = 2\beta^2\rho\,\vec{u}_\rho$ $\boxed{\vec{a} = 2\beta^2\rho\,\vec{u}_\theta}$

3°/ Le rayon de courbure $\mathcal{R} = ?$

$$\vec{a} = a_\rho \vec{u}_\rho + a_\theta \vec{u}_\theta = 2\beta^2 \rho \vec{u}_\theta$$
$$= a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$$

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{a_N^2 + a_T^2}$$

$$a = 2\beta^2 \rho = a_N^2 + a_T^2 \quad \text{or} \quad a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}\,\beta \rho\right) = \sqrt{2}\,\beta^2 \rho$$

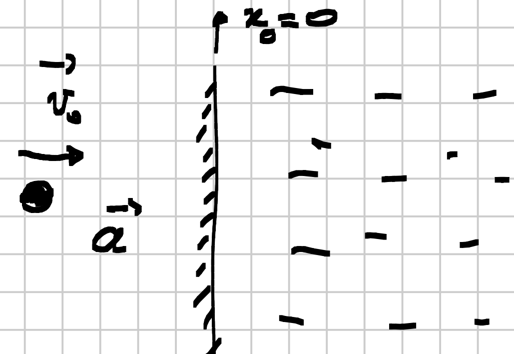
et $a_N = v^2/\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R} = \dfrac{v^2}{a_N}$

on a : $a^2 = 4\beta^4 \rho^2 = a_N^2 + 2\beta^4 \rho^2 \Rightarrow a_N^2 = 2\beta^4 \rho^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{2}\,\beta^2 \rho$

$$\mathcal{R} = (\sqrt{2}\,\beta \rho)^2 / \sqrt{2}\,\beta^2 \rho \Rightarrow \mathcal{R} = \sqrt{2}\,\rho = \sqrt{2}\,\alpha e^{\beta t} \text{ m}$$

<u>Exercice : 05</u>

$\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$, $\vec{a} = -k v^2 \vec{i}$



$x_0 = 0$
$t_0 = 0$

1°/ Loi de la vitesse : $\vec{v}(t) = ?$

on a : $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -k v^2 \vec{i}$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -k v^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -k\,dt$$

$$\text{d'-} \int_{v_0}^{v} dv/v^2 = -\int_0^t k\,dt \Rightarrow -\frac{1}{v}\Big|_{v_0}^{v} = -kt\Big|_0^t$$

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = kt \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt = \frac{1 + kv_0 t}{v_0}$$

$$v = v_0 / (1 + kv_0 t) \qquad \vec{v}(t) = v\,\vec{i}$$

2°/ L'équation du mouvement : $x(t) = ?$

On a : $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$, $v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v\,dt$

$$\Rightarrow \int_{x_0=0}^{x} dx = \int_{t_0=0}^{t} v\,dt = \int_0^t \frac{v_0}{1+v_0 k t}\,dt = x - x_0 = x$$

$\int \frac{v_0\,dt}{1+v_0 kt}$: changement de variable, $1 + v_0 kt = z$

$v_0 k\,dt = dz$

$$\int \frac{v_0\,dt}{1+v_0 kt} = \int \frac{\cancel{v_0}}{z} \cdot \left(dz / \cancel{v_0} k \right) = \int \frac{1}{k}\frac{dz}{z} = \frac{1}{k}\ln(z) \qquad dt = \frac{dz}{v_0 k}$$

$$\int_0^t \frac{v_0}{1+kv_0t}\,dt = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)\Big|_0^t = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$

3°/ après un parcours x :

$$kx = \ln(1+kv_0t) \quad \text{et} \quad v = \frac{v_0}{1+kv_0t} \Rightarrow 1+kv_0t = \frac{v_0}{v}$$

donc $\quad kx = \ln\left(\frac{v_0}{v}\right) \Rightarrow \frac{v_0}{v} = e^{kx} \Rightarrow$

$$v = v_0\, e^{-kx}$$