Université de M'Sila
Faculté des Mathématiques et d'Informatique / Département de Mathématiques
Master Maths. **S 3/ Analyse fonctionnelle**
– ***Espaces fonctionnels de type de Sobolev*** –

Homework (Devoir maison) January(Janvier) 2024

** (Utiliser les notations du cours)
** (On tiendra compte de la prśentation des copies)

Exercise 1. Give the definition :
(i) the functions ρ et γ such that $\rho(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(2^{-j}\xi) = 1 \quad (\forall \xi \in \mathbb{R})$.
(ii) the operators S_j et Q_j.
(iii) the spaces $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R})$, $B^s_{p,q}(\mathbb{R})$ and $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R})$.

Exercise 2. Show that $L_p(\mathbb{R})$ and $\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R})$ are Banach spaces.

Exercise 3. Prove the following two items :
(i) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0, M \in \mathbb{N}$ such that

$$|\varphi_j * f(x)| \leq c\, 2^{-jN}\, \zeta_{M+n+2}(\varphi)\zeta_M(f)(1+|x|)^{-M+N} \tag{1}$$

is satisfied $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$ and $\forall j \in \mathbb{N}$.

(ii) $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists c > 0, M \in \mathbb{N}$ such that

$$|\psi_j * f(x)| \leq c\, 2^{jN}\, \zeta_{M+n+2}(\psi)\zeta_M(f)(1+|x|)^{-M+N} \tag{2}$$

is satisfied $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$, $\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ and $\forall j \in \mathbb{Z}^-$.

Exercise 4. Prove that
(i) if $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ then $\|Q_j f\|_p \leq O(2^{-jN})$ with $j \to +\infty$.

(ii) if $\forall f \in \mathcal{S}_\infty(\mathbb{R})$ then $\|Q_j f\|_p + \|S_j f\|_p \leq O(2^{jN})$ with $j \to -\infty$.

===============

08.12.2023