Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

Chapitre V : Variables aléatoires

VI.1. Définitions et propriétés

Soit (Ω, P) un espace de probabilité

Définition : Une variable est une application

Soit (Ω,$\mathbb{A}$,P) un espace probabilisé, une variable aléatoire discrète X associée à cet espace probabilisé est une application sur l'espace fondamental Ω dans $\mathbb{R}$ (X : Ω → $\mathbb{R}$) qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée.

$$\sum_{x \in X} P(X = x) = 1$$

On note les éléments de la variable aléatoire discrète X par x_1 ; x_2; …. ; x_i; ….; x_n où $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$; on pose :

$$P_X (X = x_i) = P_i = P(X^{-1} (x_i)) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i = 1$$

Exemple 1 : On lance 3 pièces de monnaie et on observe le nombre de faces obtenues. Il est clair que X prend les valeurs : 0, 1, 2, 3.

Alors l'application : X : Ω → $\mathbb{R}$ est une variable aléatoire telle que

Ω = {(ppp) ; $(p\,p\,f)$; $(p\,f\,p)$; $(f\,p\,p)$; $(p\,f\,f)$; $(f\,p\,f)$; $(f\,f\,p)$; $(f\,f\,f)$} et X(Ω) = {0; 1; 2; 3}

en plus, on a

valeur de X (événement)	$[X = 3]$	$[X = 2]$	$[X = 1]$	$[X = 0]$
composition de l'événement	{PPP}	{PPF,PFP,FPP}	{PFF,FPF,FFP}	{FFF}
probabilité	1/8	3/8	3/8	1/8

$$P(X = 0) = P[(ppp)] = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$P(X = 1) = P[(ppf),\ (pfp),\ (fpp)] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 2) = P[(pff),\ (fpf),\ (ffp)] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$P(X = 3) = P[(fff)] = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

X	0	1	2	3	$\sum_{x=0}^{3} P(X = x)$
P_X	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$	1

<u>Remarque</u> : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé, alors X + Y est aussi une variable aléatoire discrète définie sur le même espace.

VI.2. Fonction de répartition

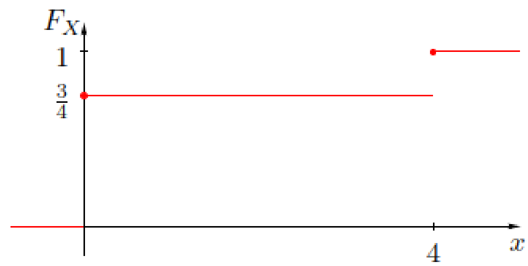
<u>Définition</u> : La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est la fonction de répartition associée à sa loi, c'est-à-dire la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = P_X(\,]-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

<u>Exemple</u> 2:
On jette successivement 2 pièces ; Ω = {PP,PF,FP,FF}. Supposons qu'un joueur mise sa fortune de 1 DA au jeu suivant basé sur cette expérience aléatoire : à chaque fois que face sort, sa fortune double, mais si pile sort, il perd tout. La variable aléatoire X donnant sa fortune à la fin du jeu est donnée par :

$X(PP) = X(PF) = X(FP) = 0,\ X(FF) = 4.$

La fonction de répartition de cette variable aléatoire est donnée par la figure suivante :



$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0, \\ \frac{3}{4} & si\ 0 \leq x < 4, \\ 1 & si\ x \geq 4. \end{cases}$$

<u>Exemple 3</u> : reprenant l'exemple 1 où on s'intéresse au nombre de face

x	*PPP*	*PPF*	*PFP*	*FPP*	*FFP*	*FPF*	*PFF*	*FFF*
valeur de X	*3*	*2*	*2*	*2*	*1*	*1*	*1*	*0*

On a vu que la loi de X est : $P[X = 0] = 1/8$, $P[X = 1] = P[X = 2] = 3/8$, $P[X = 3] = 1/8$

D'où :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/8 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 4/8 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 7/8 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

<u>Proposition</u> :

1. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$,
2. $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$

Probabilités et Statistiques

VI.3. Espérance mathématique

VI.3.1 L'espérance :

Définition : L'espérance mathématique de la variable aléatoire discrète X est le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i\, x_i$$

Remarque : L'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X est la version probabiliste de la moyenne arithmétique.

Proposition : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé. Alors :

1/ $E(X + Y) = E(X) + E(Y):$
2/ $E(aX + b) = aE(X) + b; \forall (a; b) \in \mathbb{R}^2:$

VI.3.2 La Variance :

Définition : Soit X une variable aléatoire. La variance de X est l'espérance des carrés des écarts de X à sa moyenne :

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i\,(x_i - E(x))^2$$

Proposition : Soient X une variable aléatoire discrète et a ; b deux nombre réels.

1-$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

2/ $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Exemple :

On lance un dé et on suppose que l'on gagne 100 DA si on obtient la face 1; 50 DA si on obtient la face 2 ou 3; 20 DA si on obtient la face 4 et on perd 50 DA si on obtient la face 5 ou 6.
On note X la variable aléatoire qui représente le gain.
On a la loi de probabilité de X :

x_i	-50	20	50	100
P_i	1/3	1/6	1/3	1/6

L'espérance mathématique du gain est :
$E(X)$ = -50*1/3 + 20*1/6 + 50*1/3 + 100*1/6 = 20 DA

La variance est donc donnée par :
Var(X) = 2500*1/3 + 400*1/6 + 2500*1/3 + 10000*1/6 = 3400

VI.3.2 L'écart type :

σ(X) de la variable aléatoire discrète X est la racine carrée de la variance de X

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Probabilités et Statistiques

VI.3.3 La covariance :

Définition : Soit Ω un univers fini probabilisé et soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On appelle covariance des variables aléatoires X et Y le nombre, noté $Cov(X,Y)$ (ou σ_{XY}), défini par :
$Cov(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Propriétés :

- $Cov(X, X) = Var(X)$
- Si X et Y sont indépendantes alors $COV(X, Y) = 0$, La réciproque est fausse.
- $COV(X + a, Y + b) = COV(X, Y)$
- $COV(aX, bY) = ab.COV(X, Y)$