Université de Mohamed Boudiaf, M'sila
Faculté des Sciences et Technologies
Département Génie électrique
Licence ST LMD (2ième année)

Probabilités et Statistiques

Chapitre VII : Lois de probabilité discrètes usuelles

VII.1. Loi de Bernoulli

Définition : Une expérience de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues. On s'intéresse ici à la réalisation ou non d'un événement. Autrement dit, on n'étudie que les expériences aléatoires qui n'ont que deux issues possibles. Elle se conclut par un succès si l'´événement auquel on s'intéresse est réalisé ou un échec sinon. On associe à cette épreuve une variable aléatoire X qui prend la valeur 1 de probabilité "p" si l'événement est réalisé et la valeur 0 de probabilité "q" sinon. Cette variable aléatoire ne prend donc que deux valeurs (0 et 1) et sa loi est donnée par :

$$P[X = 1] = p,\ P[X = 0] = q = 1 - p$$

La loi de Bernoulli est résumée dans le tableau ci-dessous :

X	0	1
P_X	q	p

On note $X \rightarrow B(p)$ ou $X \sim B(1 ; p)$

Exemple :

1- un patient à l'hôpital survit ou non,
2- un client signe le contrat ou non,
3- lancer une pièce de monnaie une fois, on appelle le fait d'obtenir Pile succès et échec le fait d'obtenir Face
4- un électeur vote démocrate ou républicain….

Proposition : si $X \sim B(1 ; p)$, alors :

1- la fonction de répartition :

$FX(0) = P(x \leq 0) = q = 1 - p$

$FX(1) = P(x \leq 1) = 1$

2- L'espérance mathématique est :

$$E(X) = p$$

3- La variance est : $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$= p - p^2$

$= p*(1 - p)$

$= p*q$

4- écart type est :

$$\sigma(x) = \sqrt{pq}$$

Exemple 1 :

On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse au fait d'obtenir un multiple de 2 ou de 3. Par conséquent succès S = '' obtenir un multiple de 2 ou de 3''

On note $X = \begin{cases} 1, \text{ si on obtient un multiple de 2 ou de 3} \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$

La loi de X :

X	0	1
$P(X=x_i)$	1/3	2/3

- l'espérance : E(X) = p = 2/3
- la variance Var(X) = p*(1-p) = $\frac{2}{3} * \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
- l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{p*(1-p)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

<u>Exemple 2 :</u>

On lance une pièce de monnaie, la variable aléatoire X est le nombre de faces obtenues. Alors X prend que deux valeurs 0 et 1 :

X	0	1
$P(X=x_i)$	1/2	1/2

On a :
- l'espérance : E(X) = p = 1/2
- la variance Var(X) = p*(1-p) = $\frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{p*(1-p)} = \frac{1}{2}$

VII.2. Loi binomiale

<u>Définition</u> : On effectue n ($n \in \mathbb{N}^*$) répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p. On définit la variable aléatoire X par le nombre de succès parmi les n résultats obtenus. Alors X suit une loi binomiale de paramètres n; p; q tels que q = 1 - p est la probabilité d'échec: on note X ~ B (n; p; q) où

X = {0; 1; 2;…….; n}

<u>Remarque</u> : Généralement, la loi binomiale B(n; p; q) est la loi d'une somme X de n variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi de Bernoulli

<u>Proposition</u> :

Soit X ~ B(n ; p; q), q = 1 – p, alors

1- la loi de probabilité X :

$$P(X=x) = C_n^x * p^x * (1-p)^{n-x}$$, avec x = 1; 2; 3; …; n

2- la fonction de répartition :

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} C_n^k * p^k * (1-p)^{n-k}$$

3- l'espérance : E(X) = n*p

4- la variance Var(X) = n*p*(1-p)

Probabilités et Statistiques

5- l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{n * p * (1-p)}$

Exemple 1 :

On lance 3 pièces de monnaie et on observe le nombre de faces obtenues. Il est clair que X prend

X $\rightarrow$ B(3 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$); X = {0; 1; 2; 3}

- l'espérance : E(X) = n*p = $\frac{3}{2}$
- la variance Var(X) = n*p*q = $\frac{3}{4}$
- l'écart-type : $\sigma(x) = \sqrt{n * p * q} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple 2 : On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite. Notons la variable aléatoire indiquant ''le nombre de pile obtenues''

1- Quelle est la probabilité d'avoir exactement 3 fois pile ?

2- Quelle est la probabilité d'avoir au moins 1 pile ?

Solution :

X $\rightarrow$ B(5 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$); X = {0; 1; 2; 3; 4; 5}

1- $P(X = 3) = C_5^3 * (\frac{1}{2})^3 * \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5}{16}$

2- $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0)$

$= 1 - C_5^0 * (\frac{1}{2})^0 * \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-0}$

$= 1 - 0.3125 = 0.9688$

VII.3. Loi de Poisson

La loi de Poisson est une variable aléatoire discrète utilisée souvent dans l'étude des phénomènes rares dans certaines conditions. On cite par exemple, X : le nombre des personnes âgés plus de 100 ans dans une population. La loi de Poisson décrit également le comportement du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps fixe, si ces événements se produisent avec une fréquence moyenne ou espérance connue.

Cette loi est une approximation de la loi binomiale quand np est petit et n grand (en pratique, *n* ≥ 50 et *np* ≤ 10).

Définition : soit $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$, On dit que la variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \sim P(\lambda)$, lorsque l'ensemble des valeurs prises par X est l'ensemble de tous les entiers positifs : X (Ω) = $\mathbb{N}$. En plus, on a :

$\forall\ x \in \mathbb{N}$, P(X=x) =$\frac{\lambda^x}{x!}\ e^{-\lambda}$ avec (e =2.718).

Probabilités et Statistiques

Exemple 1:

Un service d'urgence accueille en moyenne 5 fractures par fin de semaine. Quelle est la probabilité d'observer 3 fractures au cours de la prochaine fin de semaine ?

Solution :

Loi de Poisson avec $\lambda = 5$ et $x = 3$

$P(X=3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = 0.14$

Proposition :

Soit X une variable aléatoire discrète suit la loi de Poisson, $X \sim P(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$, alors :

1- la loi de probabilité $P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \forall x \in \mathbb{N}$

2- la fonction de répartition : $F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

3- L'espérance mathématique de X est: $E(X) = \lambda$

4- La variance de X est : $Var(X) = \lambda$

5- L'écart type de X est : $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

Exemple 2 :

On considère la variable aléatoire X : nombre de fautes de frappe par page du cours de Mathématiques. $X \sim P(\lambda)$ telle que $\lambda = 0,1$.

La probabilité d'avoir une erreur par page est : $P(X=1) = \frac{0.1^1}{1!} e^{-0.1} = 0.09$

VII.4 Approximation d'une loi binomiale par une loi du Poisson

Soit X une variable aléatoire discrète suit la loi binomiale $X \sim B(n; p; q)$ avec *n* grand ($n \geq 30$) et *p* petit ($p \leq 0.1$). On peut approximer cette loi par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np \leq 5$

Exemple 1 :

Dans une population une personne sur cent est un centenaire. On définit la variable aléatoire discrète X : nombre des centenaires dans une population de 200 personnes. X suit la loi binomiale de paramètres n = 200, p = 0.01 et q = 1 - p = 0.99. Comme n > 30 et p < 0.1, alors on peut approximer la loi de X par la loi de Poisson $P(\lambda)$ telle que $\lambda = np = 2$.

Exemple 2 :

On tire au hasard 400 appels, soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'appel avec dérangement. la probabilité pour l'appel soit en dérangement est p = 0.005.

1- calculer la probabilité de trouver 7 appels avec dérangement.

Solution :

$X \sim B(n = 400 ; p = 0.005)$

$$P(X=3) = C_{400}^{7} * (0.005)^3 * (1-0.005)^{400-7} = !!!!??$$

Puisque : n = 400 > 30, p = 0.005 < 0.1 et λ = *np = 400x0.005 = 2* $\leq$ 5, alors on peut utiliser la loi de Poisson.

P(X=x) = $\frac{2^x}{x!}\ e^{-2}$

P(X=7) = $\frac{2^7}{7!}\ e^{-2} = 0.0034$

2-Calculer les probabilités suivantes :

a. Il y a 2 appels avec dérangement

b. Il y a entre 2 et 4 appels avec dérangement

c. il y a au plus 3 appels avec dérangement

d. Il y a au moins 4 appels avec dérangement

Solution :

a. P(X=2) = $\frac{2^2}{2!}\ e^{-2} = 0.2707$

b. P(2≤ X ≤4) = P(2) + P(3) + P(4) = 0.5413

c. P(X ≤ 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(4) = 0.1353 + 0.2707 + 0.2707 + 0.184 = 0.857

d. P(X ≥ 4) = 1 – P(X < 4) = 1 - P(X ≤ 3) = 1 – 0.857 = 0.143

VII.5. Loi uniforme

La loi uniforme est la loi de l'absence d'information. Supposons qu'une variable aléatoire X prenne les valeurs 1,2 ,...,n , mais que nous n'ayons aucune idée de la loi de probabilité de X ; dans ce cas, après justification, on peut affecter à chaque valeur le même poids : 1/n. Et

∀k = 1, ..., n, P[X = k] = $\frac{1}{n}$

On montre facilement que

E[X] = $\frac{1+n}{2}$ et Var(X) = $\frac{(n+1)*(n-1)}{12}$

Exercice : Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

P [X = −1] = 0.2, P[X = 0] = 0.1, P[X = 4] = 0.3, P[X = 5] = 0.4

Calculer P [X ≤ 3], P [X > 2], l'espérance et la variance de X.

VII.6. Loi géométrique

Définition :

On répète continuellement et de façon indépendante une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p (non nulle). On définit la variable aléatoire discrète X par le nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir un premier succès. Alors X prend les valeurs

X = {0; 1; 2;.......; n}

et suit une loi géométrique de paramètre p. On note X → géo(p) où

$$P(X = k) = p * q^{k-1}\ ;\ \ k \geq 1$$

Pour tout n∈ $\mathbf{N}$; on a

Probabilités et Statistiques

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=k) = \frac{p}{1-q} = 1$$

<u>Proposition</u>

Soit X une variable aléatoire discrète suit la loi géométrique géo (p) :

1- L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{1}{p}$

2-La variance de X est : $Var(X) = \frac{q}{p^2}$

3-L'ecart type de X est : $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}$

<u>Exemple</u> : On lance un dé continuellement jusqu'à l'obtention d'un 6 : Soit X le nombre de lancers nécessaires. X suit la loi géométrique géo(p) où p = 1/6 est la probabilité d'obtention d'un 6: X prend toutes les valeurs entières positives 1; 2; 3; …….telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X=k) = p * q^{k-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

1- $E(X) = \frac{1}{p}$ = 6

2- $Var(X) = \frac{q}{p^2} = 30$

3- $\sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p} = \sqrt{30}$

Memento des lois usuelles

Lois discrètes

Nom	Paramètres	Support	Définition : $P(A) = \sum_{a\in A} p(a)$	Espérance	Variance
Loi de Dirac δ_a	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	$p(a) = 1$	a	0
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$p \in [0,1]$	$\{0,1\}$	$p(0) = 1-p,\ p(1) = p$	p	$p(1-p)$
Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$n \in \mathbb{N},\ p \in [0,1]$	$\{0,\ldots,n\}$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p \in]0,1]$	$\mathbb{N}^*$	$p(k) = (1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\lambda \in]0,+\infty[$	$\mathbb{N}$	$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ