

Chapitre 1 : Rappels - Définitions - Hypothèses

1. Torseurs

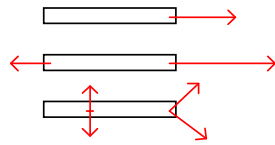
A) Systèmes de pointeurs équivalents

1) Définition

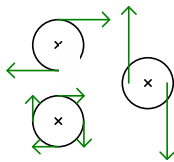
Deux systèmes de pointeurs sont équivalents lorsqu'ils ont la même résultante et le même moment en un point O

Pour un autre point O' quelconque, on aura donc aussi le même moment dans chaque système

2) Exemples



Ces trois systèmes sont équivalents. (même résultante, moment nul)



Pour les trois systèmes, la résultante est nulle, mais le moment en O de ces trois systèmes de vecteurs est le même.

Si les flèches représentent des forces, ces forces auront toutes le même effet sur la règle/la poulie. On a donc juste besoin de la résultante et du moment cinétique pour déterminer le mouvement d'un solide, mais on perd des détails ; par exemple, une règle en caoutchouc se déformera avec le deuxième cas mais pas avec le premier, même si elle a globalement le même mouvement.

B) Torseurs

1) Définition

Un torseur correspond à une classe d'équivalence entre les systèmes de pointeurs : c'est la donnée de la résultante R et de $M(O)$, appelés éléments de réduction en O . On note ce torseur $[R]$.

2) Axe central

C'est l'ensemble des points O tels que $M(O) // R$.

C) Opérations sur les torseurs

1) Addition

$$[\vec{R}] = [\vec{R}_1] + [\vec{R}_2] \begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}(O) = \vec{M}_1(O) + \vec{M}_2(O) \end{cases}$$

2) Multiplication par un scalaire

$$\lambda[\vec{R}] \begin{cases} \lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{M}(O) \end{cases}$$

3) Produit scalaire de deux torseurs

$$[\vec{R}_1] \cdot [\vec{R}_2] = \vec{R}_1 \cdot \vec{M}_2(O) + \vec{R}_2 \cdot \vec{M}_1(O) \text{ (indépendant de } O)$$

Attention, ce n'est pas un produit scalaire au sens mathématique du terme – l'application n'est pas définie-positive (C'est juste un produit donnant un scalaire comme résultat...)

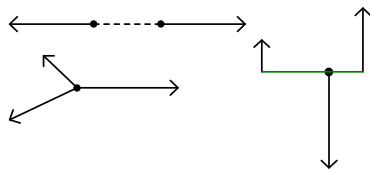
D) Torseurs particuliers

1) Torseur nul

Définition :

C'est un torseur pour lequel $\vec{R} = \vec{0}$ et pour un point O , $\vec{M}(O) = \vec{0}$; (ainsi, on a même, pour tout point O' , $\vec{M}(O') = \vec{0}$ et on peut noter $\vec{M} = \vec{0}$)

Exemple :

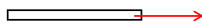


2) Glisseur

• Définition :

C'est un torseur tel que $\vec{R} \neq \vec{0}$ mais pour lequel il existe un point O tel que $\vec{M}(O) = \vec{0}$.

• Exemple :



• 1^{ère} condition nécessaire et suffisante :

Il existe un système formé d'un pointeur unique.

En effet :

→

→ → →

Un pointeur unique (A, v) est un glisseur puisqu'on a $R = v \neq 0$ et $\vec{M}(A) = \vec{0}$.

D'autre part, si un torseur vérifie $\vec{R} \neq \vec{0}$ et $\vec{M}(O) = \vec{0}$ pour un certain O , alors $(O, \vec{R})$ est un pointeur unique, et ce pointeur est bien dans le torseur.

- 2^{ème} CNS :

$$\forall O', \vec{M}(O') \perp \vec{R}$$

Condition nécessaire : ok

(s'il existe O tel que $\vec{M}(O) = \vec{0}$, alors pour tout O' , $\vec{M}(O') = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R} \perp \vec{R}$)

Condition suffisante :

$$\text{Si } \forall O', \vec{M}(O') \perp \vec{R}$$

$$\text{On a } \vec{M}(O') = \vec{M}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}.$$

$$\text{On doit donc chercher } O \text{ tel que } \vec{M}(O') = \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{R}$$

Il existe une solution :

(on peut faire une division vectorielle puisque $\vec{M}(O') \perp \vec{R}$).

$$\text{On a } \overrightarrow{O'O} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O')}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda \vec{R}.$$

- Cas particulier important :



Avec $\vec{v}_i = m_i \vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur fixe.

Montrons que c'est un glisseur :

$$\text{On doit chercher } O \text{ tel que } \sum \vec{M}_i(O) = \vec{0},$$

$$\text{C'est-à-dire tel que } \sum \overrightarrow{OA_i} \wedge m_i \vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{Soit tel que } \left(\sum m_i \overrightarrow{OA_i} \right) \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

On peut prendre en effet G , barycentre des masses.

$$\text{On a ainsi } \vec{R} = \sum m_i \vec{u} = M \vec{u}.$$

3) Couple

- Définition :

C'est un torseur pour lequel $\vec{R} = 0$ et $\vec{M} \neq \vec{0}$ (on a ainsi $\vec{M}(O') = \vec{M}(O)$ pour tous O et O')

- Exemple :



2. Définitions et hypothèses

2.1. Machine

Une machine : est une combinaison de corps à l'aide desquels les forces mécaniques de la nature sont utilisées à faire du travail accompagné par un mouvement déterminé. [Reuleaux 19^{ème} siècle]. Exemples de machines : moteur, pompe, etc.

2.2. Mécanisme

Un mécanisme : est un assemblage de corps, liés par des liaisons, pour former une chaîne cinématique avec un élément fixe, et qui a pour rôle la transformation du mouvement. [Reuleaux 19^{ème} siècle]. Exemples de mécanismes : systèmes bielle manivelle, mécanisme à came, etc.

2.3. Chaîne cinématique

Une chaîne cinématique est une collection de plusieurs corps liés entre eux par des liaisons.

2.4. Élément fixe ou bâti

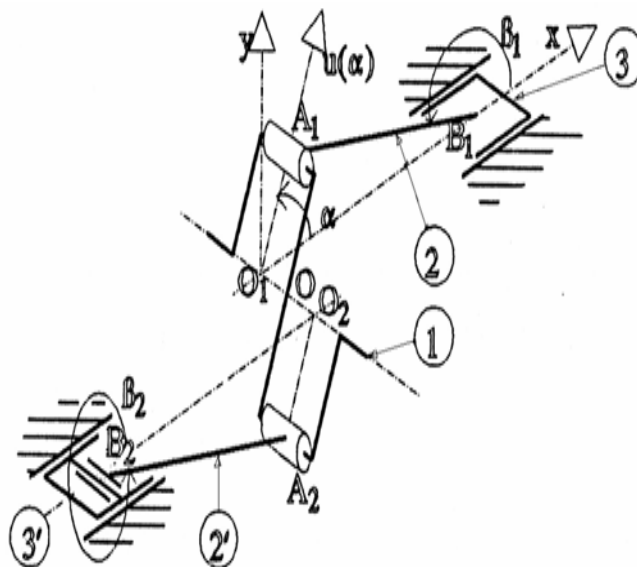
Élément fixe ou bâti : toutes les pièces fixes forment un système rigide et immobile appelé bâti. En réalité le bâti et la pièce de référence du mouvement de ce fait elle peut ne pas être fixe dans le mouvement réel. Un mécanisme est une chaîne cinématique dont un élément est considéré comme bâti.

2.5. Liaison / couple cinématique

Une liaison ou couple cinématique est un assemblage de deux éléments se trouvant en contact permanent est susceptibles d'un mouvement relatif.

2.6. Mécanismes plans

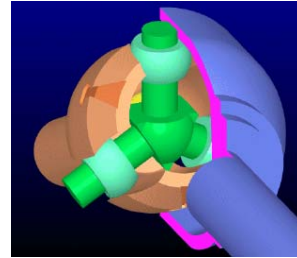
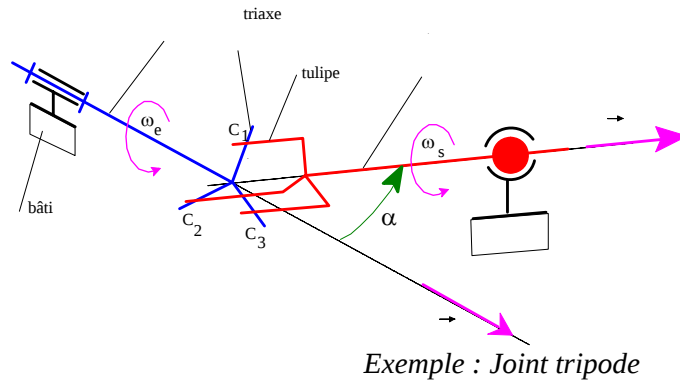
Un mécanisme est dit plan si toutes les trajectoires des points des éléments mobiles restent dans des plans parallèles au cours du mouvement.



Exemple : Double système bielle manivelle

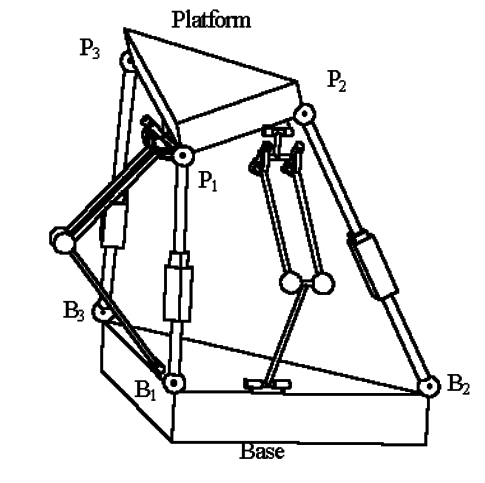
2.7. Mécanismes sphériques

Un mécanisme est dit sphérique si chaque élément mobile du mécanisme possède un point fixe lors du mouvement du système et que tous ces points sont coïncidents.



2.8. Mécanismes spatiaux

Les mécanismes spatiaux n'ont aucune restriction sur les mouvements des éléments les constituants.



3. Liaisons usuelles

3.1. Degré de liberté

Dans le cas général le mouvement d'un solide peut être décomposé en des mouvements élémentaires suivant les 3 directions. Sur chaque axe on a une rotation et une translation. Au total on a 3 rotations et 3 translations chacun de ces 6 mouvement est appelé degré de liberté (DDL).

Dans le cas contraire le manque d'un de ces 6 DDL est une liaison.

$$\text{Liaison} = \overline{\text{DDL}}$$

On peut exprimer la relation entre les liaisons et les DDL :

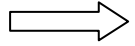
$N = 6 - L$ N : nombre de DDL et L : nombre de liaisons

3.2. Etude de la liaison ponctuelle

Considérons la liaison ponctuelle 1/2 (figure ci-contre). Suivant les trois axes on a 3 rotations et suivant les axes Ox et Oy on a 2 translations, la translation suivant Oz est absente à cause de la réaction $\vec{R}_{2/1}$.

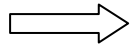
Du point de vue statique :

Manque de translation



Présence de force

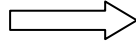
Manque de rotation



Présence d'un moment

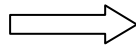
Du point de vue cinématique :

Présence de translation

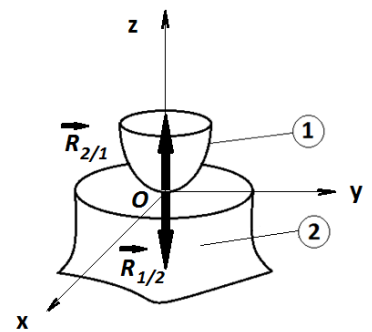
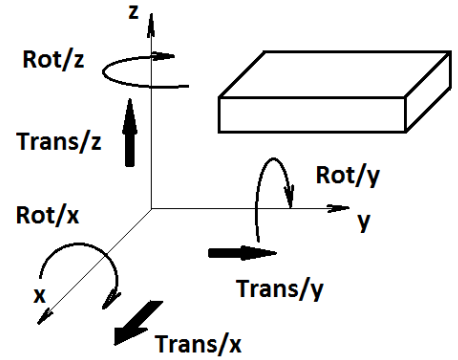


Vitesse linéaire

Présence de rotation



Vitesse angulaire



3.3. Torseur associé à une liaison

Considérons toujours la liaison ponctuelle :

a) Torseur cinématique :

Soit le vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ et le vecteur vitesse linéaire $\vec{V} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$

Le bilan de DDL de la liaison ponctuelle étudiée sera exprimé par les vitesses :

3 rotations : ω_x , ω_y , ω_z et 2 translations : V_x , V_y avec $V_z = 0$

Le torseur cinématique associé à cette liaison :

$$\vartheta_O = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V} \end{matrix} \right\} \text{ ou } \vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$$

b) Torseur statique

Au point de contact s'appliquent des forces et des moments de réaction. Soit la force de réaction

$$\vec{R}_{2/1} = \vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \text{ et } \vec{M}_{2/1} = \vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

3 rotations se traduisent par l'absence de M_x, M_y, M_z

2 translations se traduisent par l'absence de R_x, R_y

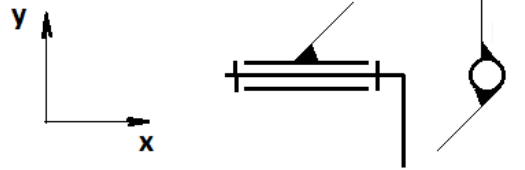
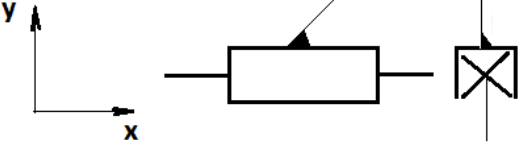
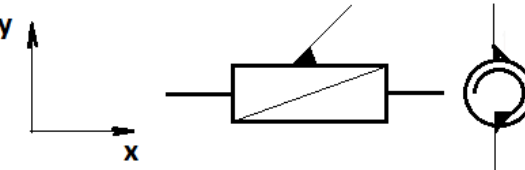
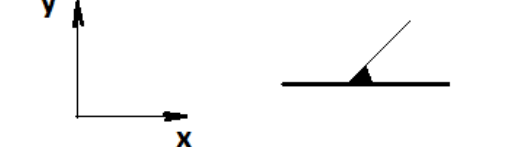
1 liaison suivant Oz se traduit la présence de R_z

Le torseur statique s'écrit :

$$\tau_O = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \text{ ou } \tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{pmatrix}$$

3.4. Liaisons usuelles

Liaison	Schéma	Torseur statique	Torseur cinématique
Ponctuelle		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{pmatrix}$
Linéaire		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ 0 & V_z \end{pmatrix}$
Linéaire annulaire		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_y & V_z \end{pmatrix}$
Liaison plan		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & M_y \\ 0 & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & V_y \\ 0 & V_z \end{pmatrix}$
Rotule		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$
Sphérique à doigt		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & 0 \\ R_z & 0 \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix}$

Pivot Glissant		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Pivot		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Glissière		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Hélicoidale		$\tau_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Encastrement		$\tau_O = \begin{pmatrix} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{pmatrix}$	$\vartheta_O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$