RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-

FACULTÉ DE THECHNOLOGIE

N° d'ordre: ....

Cours

Mathématiques 02

Spécialité:

ST

Par:

Toufik HERAIZ

Thème

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Année Universitaire : 2019/ 2020

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 2: Les équations différentielles

LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES $(E.D.O)$

1.1 Définitions et notations

Définition 1.1.1 *Une équations différentielles ordinaires, notée* $(E.D.O)$*, d'ordre* n *est une relation entre la variable reélle* x*, une fonction inconnue* $x \mapsto y(x)$ *et ses dérivées* $y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}$ *au point* x *définie par:*

$$F\left(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^{(n)}\right) = 0$$

tel que: $y^{'} = \dfrac{dy}{dx}$ et $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

Si $n = 1$, la fonction $F\left(x, y, y^{'}\right) = 0$ s'appelle **équation différentielle du premier ordre.**

Si $n = 2$, la fonction $F\left(x, y, y^{'}, y^{''}\right) = 0$ s'appellé **équation différentielle du deuxiéme ordre**.

Exemple 1.1.1

$$y^{'}(x) - x = 0 : \quad \text{équation différentielle d'ordre1.}$$
$$y^{''}(x) - y^{'}(x) = 2x \sin(x) : \quad \text{équation différentielle d'ordre2.}$$
$$y^{(4)}(x) + 2y^{''}(x) - y(x) = x : \quad \text{équation différentielle d'ordre4}$$

Notation: On note y au lieu $y(x)$, et $y^{'}$au lieu $y^{'}(x)$

Par exemple*:* $y' = \cos x$, signifie "$y'(x) = \cos x$"

1.2 Equations différentielles du premier ordre

Définition: une équation de la forme $F\left(x, y, y^{'}\right) = 0$ où y qui est en fonction de x est l'inconnu, s'appelle équation différentielle du premier ordre.

1.2.1 Equaions différentielles séparables (E.D.S)

Elle sont de la forme

$$y' f(y) = g(x)$$

où f et g sont des fonctions données dont on connaît des primitives F et G, on a

$$\int y^{'} f(y)\, dy = \int g(x)\, dx, (y' = \tfrac{dy}{dx}) \quad \Longrightarrow \quad F(y) = G(x) + C \quad où C \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.1 *1.* ***Exemple 1.2.2*** *Résoudre l'équation:* $y' = x^{^2} + 1$

on a $y\prime = x^2 + 1 \implies \int y^{'} dx = \int (x^2 + 1)dx$

$\implies \int dy = \int (x^2 + 1)dx$

$\implies y = \frac{x^3}{3} + x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$

2 Intégrer l'équation suivante: $y' = xy$

on a $y\prime = xy \implies \dfrac{y'}{y} = x$

$\implies \int \frac{1}{y} dy = \int x dx$

$\implies \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$ avec $C \in \mathbb{R}.$

Ainsi, toute solution non nulle est de la forme

$$y(x) = Ke^{\frac{x^2}{2}}, \quad \text{avec} K \in \mathbb{R}^*.$$

1.2.2 Equations différentielles homogénes(E.D.H)

Elles sont de la forme

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Pour résoudre cette équation, on pose: $t = \frac{y}{x}, (y = xt \text{ et } y' = t'x + t)$, où t est une fonction de x, on obtient ainsi une équation différentielle à variables séparables.

Exemple 1.2.3 $xy' = x + y$

$xy' = x + y$ est une équation homogène, car elle peut s'écrire: $y' = 1 + \frac{y}{x}$
En posant: $\dfrac{y}{x} = t, (y = xt)$,on obtient l'équation $t'x + t = 1 + t$
d'oú $t' = \frac{1}{x}$(E.D.S)
la solution générale de l'équation proposée est: $t = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$
et la solution générale de l'équation homogène est

$$y = x\ln|x| + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

1.2.3 Equations différentielles linéaires(E.D.L)

Elles sont de la forme:

$$y' + f(x)\,y = g(x)\,. \tag{(E)}$$

où f et g sont des fonctions données,
L'équation E est dite homogéne (E.H) ou sans second membre (E.S.S.M) si $g = 0$,
c'est à dire:

$$y' + f(x)\,y = 0 \tag{(E$_0$)}$$

La solution générale de l'équation complête E est de la forme:

$$y_g = y_0 + y_p$$

Où y_p est une solution particulière de E et y_0 est la solution générale de E_0

Exemple 1.2.4

Méthode de variation de la constante

La Méthode de variation de la constante est une méthode pour déterminer les solutions d'une équation différentielle avec second membre connaissant la solution de l'équation homogène.

Si y_0 est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = C(x)y_0(x)$

Exemple: soit à résoudre:

$$xy^{'} - y = x^2e^x, \text{ sur }]0, +\infty[.$$

1. On résoudre l'équation homogène $xy^{'} - y = 0$

$$\begin{aligned} x\tfrac{dy}{dx} - y = 0 \quad &\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C \\ &\Rightarrow y = Cx. \end{aligned}$$

2. On cherche une solution particulière sous la forme $y = C(x)x$, alors $y' = C'(x).x + C(x)$, on remplace dans l'equation complète, on trouve

$$C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x^2e^x \Leftrightarrow C^{'}(x) = e^x$$

On en déduit que $C(x) = e^x + \lambda$, et donc

$$y = x(e^x + \lambda)$$

1.2.4 Equation différentielle de Bernoulli

On appelle équation de Bernoulli toute équation différentielle de la forme

$$y' + yf(x) = y^ng(x)$$

si $n = 0$, équation linéaire complète.

si $n = 1$, équation linéaire sans second membre.

$n \neq 0$, $n \neq 1$, $y \neq 0$; on pose $z = y^{1-n}$. On aura, $\frac{1}{1-n}z' + zf(x) = g(x)$. On est dans le cas linéaire.

Exemple 1.2.5 *Intégrer l'équation* $y' + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$

On pose $z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$

L'équation devient $2z' + 2z = x + 1$.(E.D.L)

1.3 EQUATIONS DIFFERENTIELLES DU SECOND ORDRE

1.4 Généralités

On appelle équation différentielle du second ordre toute relation de la forme

$F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ entre la variable x et la fonction $y(x)$ et ses deux dérivées premières.

Exemple 1.4.1 $y'' + 2y' + y = 0$; $y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$

1.5 Equations différentielles du second ordre incomplètes (ne contenant pas de y):

Elle sont de la forme

$$F(x, y', y'') = 0$$

pour résoudre cette équation on pose: $y' = t$, l'équation devient alors:

$F(x, t, t') = 0$ (E,D, du premier ordre).

Exemple 1.5.1 $xy'' + 2y' = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (E)$

On pose: $y' = t \implies xt' + 2t = 0$ (E,D du premier ordre séparable)

$$\begin{aligned}
&\implies x\frac{dt}{dx} = -2t \\
&\implies \int \frac{dt}{t} = -2\int \frac{dx}{x} \\
&\implies \ln|t| = -2\ln|x| + \ln|C| \\
&\implies \ln|t| = \ln\frac{C}{x^2} \\
&\implies t = \frac{C}{x^2} = y'
\end{aligned}$$

donc

$$y = \frac{-C}{x} + k, k \in \mathbb{R}$$

est une solution de l'équation incomplète (E).

1.5.1 Equations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

Elle sont de la forme:

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{(EC)}$$

Où a, b et c sont des coefficients constants, et $f(x)$ le second membre. A cette équation nous associons l'équation sans second membre$(E.S.S.M)$ ou homogène:

$$ay'' + by' + cy = 0, ...(E_0)$$

La solution générale y de (E) est la somme de la solution générale y_H de (E_0) et d'une solution particuliere y_P de (E) :

$$y = y_H + y_P$$

Résolution:

a) Recherche de y_H solution générale de (E_0) : $ay'' + by' + cy = 0$.

Nous avons trouvé précédemment, les solutions suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. La solution générale est $y_H = C_1y_1 + C_2y_2$ avec les constantes C_1 et C_2 et les deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2 de (E_0).

On a 3 cas:

1) Si $\Delta > 0$: L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1$et r_2 $\left(r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},\ r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

soit $y_1 = e^{r_1x}$ et $y_2 = e^{r_2x}$; la solution générale de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad , (C_1, C_2 \ \in \mathbb{R})$$

2) Si $\Delta = 0$: L'équation caractéristique admet une racine double $r = -\frac{b}{2a}$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme:

$$y = C_1 x e^{rx} + C_2 e^{rx} = (C_1 x + C_2)\, e^{rx} \quad , (C_1, C_2 \ \in \mathbb{R})$$

3) Si $\Delta < 0$: $r_1$et r_2 sont complexes, $r_1 = \alpha + \beta i$ et $r_2 = \alpha - \beta i$

La solution générale de l'équation homogène est de la forme:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

Exemple 1.5.2 *Résoudre les équations différentielles suivantes*

$1)y'' + y' - 2y = 0, \quad 2)y'' + 2y' + y = 0 \quad 3)y'' + y = 0$

1) $y'' + y' - 2y = 0$

l'équation caractéristique: $r^2 + r - 2 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -2$

Donc la solution générale de l'équation (1) est:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}, ...(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

2) $y'' + 2y' + y = 0$

L'équation caractéristique: $r^2 + 2r + 1 = 0$ admet une racine double $r = -1$

donc la solution générale de l'équation (2) est

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} = e^{-x}\,(C_1 + C_2 x)$$

3) $y'' + y = 0$

L'équation caractéristique: $r^2 + 1 = 0$ admet deux racines complexes $r_1 = i$ et $r_2 = -i$

donc la solution générale de l'équation (2) est

$$y = (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)), ...(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Plan

............................Résoudre l'équation: $ay'' + by' + cy = 0$

$$\Downarrow$$

E.C: $ar^2 + br + c = 0$

$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$,	$y = (C_1 x + C_2)\, e^{rx}$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

b) Recherche la solution particulière y_P de E

$$ay'' + by' + cy = f(x), ...(E)$$

b.1) Cas où $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, où P_n est un polynome de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors il existe une solution particulière de E de la forme :
$i).y_P = e^{\alpha x} Q_n(x)$ si α n'est pas une racine de (E_0).($\alpha \neq r_1$ et $\alpha \neq r_2$)
$ii).y_P = x e^{\alpha x} Q_n(x)$ si α est une racine de (E_0).($\alpha = r_1$ ou $\alpha = r_2$)
$iii).y_P = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$ si α est une racine double de (E_0).($\alpha = r_1 = r_2$)

Où Q_n est un polynôme de meme dégrée de P_n

Exemple 1.5.3 *Résoudre l'équation suivante: $y'' + 2y' + 4y = xe^x$*

$f(x) = xe^x$, $P_1(x) = x$, donc: $Q_1(x) = ax + b$

$$y_G = y_H + y_P$$

1) On comence par résoudre l'équation homogène $y'' + 2y' + 4y = 0$

$E.C$: $r^2 + 2r + 4 = 0$ admet deux solution: $r_1 = -1 + \sqrt{3}i$ et $r_2 = -1 - \sqrt{3}i$

Donc la solution générale de $y'' + 2y' + 4y = 0$ est

$$y_H = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2 \sin \sqrt{3}x)$$

2) Calcul de y_P :

$f(x) = xe^x$, $P_1(x) = x$, donc: $Q_1(x) = ax + b$

$\alpha = 1$ (n'est pas une racine de $E.C$), on va cherche une solution particuliere sous la forme: $y_P = e^x(ax + b)$ .En dérivant, on trouve

$$y'_P = e^x(ax + b + a), \; y''_P = e^x(ax + b + 2a)$$

et donc a et b sont solutions du système:

$$\begin{cases} 7ax = x \\ 4a + 7b = 0 \end{cases}$$

On résoudre ce système, et on trouve $a = \frac{1}{7}$ et $b = \frac{-4}{49}$

Donc

$$y_P = \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$$

Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y_G = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{3}x + C_2\sqrt{3}x) + \frac{1}{7}x - \frac{4}{49}$$

b.2) cas où $f(x) = P_n(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + ... + A_nx^n$

Alors il existe une solution particulière de E de la forme

$i.y_P = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n$ si $c \neq 0$.

$ii.y_P = x(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n\ )$ si $c = 0, b \neq 0, a \neq 0$

Sinon: $y_P = x^2(C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n\ )$

Exemple 1.5.4 *Résoudre l'équation suivante:* $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 2$

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = P_2(x)$

$$y_G = y_H + y_P$$

1) On comonce par résoudre l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$

$E.C : r^2 - 3r + 2 = 0$ admet deux solution $r_1 = 1, r_2 = 2$

Donc la solution générale de $y'' - 3y' + 2y = 0$ est de la forme:

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{2^x}$$

2) Calcul de y_P :

$f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ et $c = 2$ $(c \neq 0)$, on va cherche une solution particuliere sous la forme: $y_P = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$.d'aprés les calcules on trouve

$$y_p = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{2}x + x^2$$

La solution générale de l'équation $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 5x + 2$ est

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{2^x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + x^2$$

Méthode générale

Méthode de variation des constantes

Nous devons résoudre une équation différentielle de la forme

$$ay^{''} + by^{'} + cy = f(x) \qquad \text{avec } a \neq 0$$

Lorsque le second membre n'a pas l'une des formes indiquées précédemment, on emploie la méthode dite de variation des constantes.

Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée

$$ay^{''} + by^{'} + cy = 0$$

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on suppose que les constantes C sont des fonctions de x dérivables.

On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$ avec $C_1^{'}(x)y_1 + C_2^{'}(x)y_2 = 0$

Il reste alors $y^{'} = C_1 y_1^{'} + C_2 y_2^{'}$ et en dérivant

$$y'' = C_1^{'}y_1^{'} + C_2^{'}y_2^{'} + C_1 y_1^{''} + C_2 y_2^{''}$$

En reportant dans l'équation complète en tenant compte du fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation incomplète, aprés simplification il reste

$$a(c_1^{'}y_1^{'} + c_2^{'}y_2^{'}) = f(x)$$

D'où le système qui détermine $c_1^{'}$et $c_2^{'}$

$$\begin{cases} c_1^{'}y_1^{'} + c_2^{'}y_2^{'} = \dfrac{f(x)}{a} \\ c_1^{'}y_1 + c_2^{'}y_2 = 0 \end{cases}$$

Exemple: Résoudre l'équation suivante $y'' + y = \cos(x)$

1) l'équation homogène est $y'' + y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$:

$$\Delta = -4 < 0 \Rightarrow \pm i$$

La solution générale de l'équation homogène est

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

2) On cherche la solution particulière sous la forme $C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ avec $y_1(x) = \cos(x)$, et $y_2(x) = \sin(x)$

$$\begin{cases} C_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{'}(x) = f(x) \\ C_1^{'}(x)y_1(x) + C_2^{'}(x)y_2(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -C_1'(x)\sin(x) + C_2'(x)\cos(x) = \cos(x) \\ C_1'(x)\cos(x) + C_2'(x)\sin(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C_1'(x) = -\sin(x)\cos(x) = -\dfrac{\sin(2x)}{2} \quad \Rightarrow C_1(x) = \dfrac{\cos(2x)}{4}$

$C_2'(x) = \cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2} \Longrightarrow C_2(x) = \dfrac{\sin(2x)}{4} + \dfrac{x}{2}$

une solution particulière est donc

$$y_P(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) = \frac{\cos(2x)\cos(x) + \sin(2x)\sin(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2}$$
$$= \frac{\cos(x)}{4} + \frac{x\sin(x)}{2}$$

La solution générale de l'équation est

$$y(x) = C_1(x)\cos(x) + C_2(x)\sin(x) + \frac{\cos(x)}{4} = \frac{x\sin(x)}{2}$$