



Pour le calcul de  $x_i$ , les composantes  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{i+1}$  sont connues, on les remplace dans l'équation  $i$ , ce qui donne :

$$x_i = (y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j)/u_{ii} \quad i=n-1, n-2, \dots, 1.$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) est le produit des éléments de la diagonale (du pivot) de cette matrice.

$$\det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii} = u_{11}u_{22} \dots u_{nn}$$

**Exemple :** Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3z = 3 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

1. Ecrire le système sous la forme matricielle.
2. Trouver la solution du système.
3. Calculer le déterminant de la matrice du système.

**Solution**

1. Ecriture du système sous la forme matricielle en permutant les lignes 2 et 3 pour avoir un système triangulaire supérieur. N'oublions pas que le déterminant sera multiplié par -1 à cause de la permutation.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. La substitution en arrière donne :

$$eq. 3 : z = \frac{3}{3} = 1, \quad eq. 2: y = \frac{1+1}{2} = 1 \quad et \quad x = 1 + 1 - 1 = 1$$

3.  $\det(A) = (-1) * 1 * 2 * 3 = -6.$

**2.1 Méthode d'élimination de GAUSS**

Dans ce chapitre, on va commencer par la méthode d'élimination de GAUSS qui est similaire à celle de l'élimination avec une modification très importante qui facilite énormément la résolution même de systèmes à grandes tailles (des milliers où même des millions). Cette modification transforme un système à matrice  $A$  pleine, en un autre à système à matrice  $U$  triangulaire supérieure, de telle façon que les deux systèmes  $AX=B$  et  $UX=Y$  soient équivalents c. à. d. ont la même solution.

L'algèbre linéaire montre que certaines transformations apportées aux systèmes d'équations ne changent pas leurs solutions, dans notre cas les opérations qu'on va appliquer sont les suivantes :

- Multiplication de l'équation  $E_i$  par une constante  $\alpha$  non nulle, la nouvelle équation obtenue  $E_{in} = \alpha E_i$  remplacera l'ancienne  $E_i$ .
- Multiplication de l'équation  $E_j$  par  $\alpha$  non nulle et son ajout à  $E_i$ ,  $E_{in} = E_i + \alpha E_j$ , l'équation obtenue  $E_{in}$  remplacera  $E_i$ .
- Permutation des équations  $E_i$  et  $E_j$ .

L'application d'une série de ces opérations transformera le système  $AX=B$  en  $UX=Y$  puis une substitution en arrière donnera la solution du système.

### 2.1.1 Description de la méthode d'élimination de GAUSS

On va montrer comment appliquer les transformations au système  $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ , pour cela le second membre  $\mathbf{B}$  sera considéré comme la colonne  $(\mathbf{n}+1)$  et sera aussi affecté par les opérations. On divise le travail en  $(\mathbf{n}-1)$  étapes chacune d'elle annule les éléments au-dessous du pivot de la colonne  $(\mathbf{a}_{ij}$  pour  $\mathbf{i} > \mathbf{j}$ ). Au début chaque étape, on vérifie que le pivot est non nul. Pour l'étape  $\mathbf{i}$  le pivot est  $\mathbf{a}_{ii}^{(t-1)}$  à l'étape  $(\mathbf{i}-1)$ .

Le système à l'état initial où à l'étape  $(\mathbf{0})$  est donné par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix}^{(0)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ \vdots \\ a_{nn+1} \end{bmatrix}^{(0)}$$

**Première étape :** On vérifie tout d'abord que le pivot de la première étape qui est  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  pour  $i = 1$  i.e  $a_{11}^{(0)} \neq 0$ .

Pour annuler l'élément  $a_{21}^{(0)}$  de la deuxième ligne, on multiplie la première équation par  $a_{21}^{(0)}$  et on la divise par  $a_{11}^{(0)}$  puis on fait la différence de cette nouvelle équation avec la deuxième. L'équation obtenue remplacera la deuxième.  $E_2^{(1)} = E_2^{(0)} - E_1^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

Cette opération donne  $a_{21}^{(1)} = 0$ ,  $a_{22}^{(1)} = a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ , ...,  $a_{2n+1}^{(1)} = a_{2n+1}^{(0)} - a_{1n+1}^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

En général, on écrit :  $a_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(0)} - a_{1j}^{(0)} \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$  Pour  $j = 2, n + 1$

On continue cette procédure avec les lignes 3,4,..., pour la ligne  $i$  on a :

$$E_i^{(1)} = E_i^{(0)} - E_1^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

Cette opération donne  $a_{i1}^{(1)} = 0$ ,  $a_{i2}^{(1)} = a_{i2}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ , ...,  $a_{in+1}^{(1)} = a_{in+1}^{(0)} - a_{1n+1}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$

En général, on écrit :  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{1j}^{(0)} \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$  Pour  $i = 2, n$  et  $j = 2, n + 1$

A la fin de la première étape, on obtient des éléments nuls au-dessous du pivot de la première étape. Le système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^{(0)} \\ a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nn+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

**Deuxième étape :**  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  pour  $i = 2$  i.e  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ .

De la même façon, on obtient pour le cas général

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(1)} \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \text{ Pour } i = 3, n \text{ et } j = 3, n + 1$$

**Etape k :**  $a_{ii}^{(i-1)} \neq 0$  pour  $i = k$  i.e  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ .

Pour une étape  $k$  quelconque, on a :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{kj}^{(k-1)} \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \text{ Pour } k = \overline{1, n-1}, \quad i = \overline{k+1, n} \text{ et } j = \overline{k+1, n+1}$$

A la fin de la procédure, on obtient un système à matrice triangulaire supérieure qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1n+1}^{(0)} \\ a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots \\ a_{nn+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système se fait par substitution en arrière.

### **2.1.2 Le nombre d'opérations nécessaires pour l'application de l'algorithme de**

**GAUSS est :**

**Nombre de multiplications et d'additions :**

$$nm = na = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

---

**Nombre de divisions :**

$$nd = \frac{n(n+1)}{2}$$

**2.1.3 Applications de la méthode de GAUSS.****a) Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire :**

Le déterminant d'une matrice triangulaire est donné par :

$$\det(U) = (-1)^P \prod_{i=1}^n u_{ii} = (-1)^P u_{11} u_{22} \dots u_{nn}$$

Avec P le nombre de permutation de lignes ou de colonnes effectuées lors de l'application de l'algorithme de GAUSS.

**Exemple :** Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 5y + z = 16 \\ -x + 4y + 7z = 28 \end{cases}$$

1. Calculer le nombre d'opérations élémentaires pour la méthode de Gauss.
2. Calculer le déterminant de la matrice du système.
3. Résoudre le système par l'élimination de Gauss.
4. Recalculer le déterminant de la matrice du système.

**b) Résolution simultanée de plusieurs systèmes à même matrice A :**

Dans la pratique, on rencontre souvent le cas de plusieurs systèmes d'équations qui ne diffèrent que par le second membre B. On peut appliquer l'algorithme de GAUSS sur la matrice A augmentée par tous les seconds membres. De cette façon, on fait les calculs une seule fois sur la matrice A, la substitution se fait avec chaque second membre obtenu à part.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & z_1 \\ b_2 & c_2 & \dots & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & c_n & \dots & z_n \end{bmatrix}$$

**c) Calcul de l'inverse d'une matrice :**

Si **A** est une matrice d'ordre **n**, la matrice  $A^{-1}$  tel que  $A.A^{-1} = I$  est dite matrice inverse de **A**.