Chapitre 3 : Méthodes itératives pour les systèmes d'équations linéaires

On a vu que les méthodes directes donnent la solution exacte du système d'équations linéaires, cependant elles restent gourmandes en mémoire. Dans ce chapitre on va introduire les méthodes itératives ou indirectes qui donnent une solution approximative du système d'équations linéaires. Ces méthodes sont très faciles à mettre en œuvre et à programmer, elles ne consomment pas la mémoire et donnent des résultats autant précis que l'on veut.

3.1 Méthode de Jacobi

Elle utilise le principe du point fixe pour un système d'équations linéaires, soit le système :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Transformons le système en supposant que les éléments du pivot sont non nuls $a_{ii} \neq 0$ $i = \overline{0,n}$.

$$\begin{cases} x_1 = (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n)/a_{11} \\ x_2 = (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n)/a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = (b_n - a_{n2}x_2 - a_{n3}x_3 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1})/a_{nn} \end{cases} \qquad (2)$$

Pour résoudre le système (1) on utilise l'écriture (2) en portant les termes de droite à l'itération (k) et ceux à gauche à l'intération (k).

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n2}x_2^{(k)} - a_{n3}x_3^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)})/a_{nn} \end{cases} \qquad (3)$$

En prenant une estimation initiale $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ et en utilisant le système (3) on calcule $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (3) avec k=1 on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon de calculer les vecteurs $X^{(3)}$, $X^{(4)}$, $X^{(5)}$,… jusqu'à la convergence.

3.2 Méthode de Gauss-Seidel

Partons de la méthode de Jacobi, le calcul des vecteurs $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}$,… mène à la convergence, cela veut dire que chaque nouveau vecteur est meilleur que le précédent. On remarque dans la méthode de Jacobi que pour calculer la composante $x_2^{(2)}$ du vecteur $X^{(2)}$ on utilise celles de $X^{(1)}$ malgré que $x_1^{(2)}$ est déjà calculée et elle est meilleure que $x_1^{(1)}$. D'ici vient le principe de la méthode de Gauss-Seidel, on utilise chaque composante des quelle sera calculée. Ainsi, pour calculer la composante $x_i^{(k+1)}$, on utilise toutes les composantes de $x_1^{(k+1)}$ à $x_{i-1}^{(k+1)}$ déjà calculées à l'itération (*k+1)* en plus de celles $x_{i+1}^{(k)}$ à $x_n^{(k)}$ qui ne sont qu'à l'itération (*k)*. On écrit donc :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ x_3^{(k+1)} = (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)})/a_{33} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases} \quad (4)$$

En prenant une estimation initiale $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ et en utilisant le système (4) on calcule $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ ensuite on remplace le vecteur $X^{(1)}$ dans le système (4) avec *k=1* on calcule $X^{(2)}$ et continue de la même façon de calculer les vecteurs $X^{(3)}$, $X^{(4)}$, $X^{(5)}$,… jusqu'à la convergence.

3.3 Condition de convergence des méthodes itératives

Pour que les méthodes itératives de résolution des systèmes d'équations linéaires convergent il faut que le rayon spectral de la matrice A soit inférieur à l'unité. Cette condition est équivalente à dire que la matrice A est diagonalement dominante ce qui est très facile à vérifier.

On dit qu'une matrice est diagonalement dominante si la valeur absolue de l'élément de la diagonale est supérieure à la somme des valeurs absolues de tous les autres éléments sur la même ligne. On écrit donc :

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + |a_{i2}| + \cdots + |a_{ii-1}| + |a_{ii+1}| + \cdots + |a_{in}| \quad (5)$$

Avec i variable entre 1 et n le nombre de lignes ou de colonnes de la matrice.

3.4 Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Jacobi et Gauss-Seidel

On arrête les calculs pour cette méthode lorsque la différence absolue entre deux itérations successives soit inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$\left|X^{(n+1)} - X^{(n)}\right| < \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

Ici, il faut vérifier la différence pour toutes les composantes une par une.

$$\left|x_1^{(n+1)} - X_1^{(n)}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \left|x_2^{(n+1)} - X_2^{(n)}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}, \dots, \left|x_n^{(n+1)} - X_n^{(n)}\right| < \boldsymbol{\varepsilon}$$