$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2n} \\ & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} \ldots & x_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \cdots & x_{2n} \\ & \vdots & \\ x_{n1} & x_{n2} \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Utiliser la méthode de Gauss pour calculer la matrice inverse.
2. Calculer le nombre d'opérations.

2.2. Utilisation de la pivotation.

Dans l'élaboration de l'algorithme de GAUSS, on a supposé que le pivot ne soit pas nul, ce n'est pas le cas toujours. Parfois le pivot est très petit comparativement aux autres termes ou même nul, dans ce cas on peut utiliser la technique de la pivotation soit partielle ou totale.

Pivotation partielle :

Dans ce cas on choisit comme pivot l'élément $a_{lk}^{(k-1)}$ tel que :

$$a_{lk}^{(k-1)} = \max_{i \in [k,n]} \left| a_{ik}^{(k-1)} \right|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \ldots & a_{1k} & a_{1n} \\ 0 \ldots & \boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{a_{kk}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a_{nk}} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots a_{kn} \\ \\ \ldots a_{nn} \end{matrix} \\ 0 \ldots & & \end{bmatrix}$$

Dans la pivotation partielle, on utilise la permutation des lignes ceci n'a aucun effet sur la solution du système.

Pivotation totale :

Dans la pivotation totale le choix du pivot se fait à partir d'une sous matrice incluant la permutation des lignes et des colonnes tel que :

$$a_{lm}^{(k-1)} = \max_{i,j \in [k,n]} \left| a_{ij}^{(k-1)} \right|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \dots & a_{1k} & a_{1n} \\ 0 \dots & \boxed{\begin{matrix} \boldsymbol{a_{kk}} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \\ \boldsymbol{a_{nk}} & \dots & a_{nn} \end{matrix}} & \\ 0 \dots & & \end{bmatrix}$$

Exemple : Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Utiliser la méthode de Gauss avec pivotation partielle ensuite totale pour résoudre le système.

2.3 Algorithme de THOMAS

Dans les méthodes numériques de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles, on rencontre des matrices à trois diagonales (principale, sous diagonale et sur diagonale). Ce type de matrices est dit tri diagonales. L'algorithme de résolution de ce type de système est un cas particulier de l'élimination de GAUSS. Soit le système à matrice tri diagonale suivant :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \cdots & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ & & & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

On divise la première ligne par b_1 cela donne $\quad 1 \quad c_1/b_1 \quad \cdots \quad y_1/b_1$

On note $\gamma_1 = c_1/b_1$ et $\beta_1 = y_1/b_1$

Ensuite on transforme la deuxième ligne par $E_2^{(1)} = E_2^{(0)} - E_1^{(0)} a_2$ cela donne

$$0 \qquad b_2 - a_2\gamma_1 \qquad c_2 \dots\dots \; y_2 - a_2\beta_1$$

On divise la nouvelle deuxième ligne par $b_2 - a_2\gamma_1$ cela donne :

$$0 \qquad 1 \qquad c_2/(b_2 - a_2\gamma_1) \dots\dots \; (y_2 - a_2\beta_1)/(b_2 - a_2\gamma_1)$$

On note $\gamma_2 = c_2/(b_2 - a_2\gamma_1)$ et $\beta_2 = (y_2 - a_2\beta_1)/(b_2 - a_2\gamma_1)$

De la même façon on continue avec la ligne trois ce qui donne

$$0 \qquad 0 \qquad 1 \qquad c_3/(b_3 - a_3\gamma_2) \qquad \dots\dots (y_3 - a_3\beta_2)/(b_3 - a_3\gamma_2)$$

On note $\gamma_3 = c_3/(b_3 - a_3\gamma_2)$ et $\beta_3 = (y_3 - a_3\beta_2)/(b_3 - a_3\gamma_2)$

En général pour une ligne i on a :

$$0 \quad 0 \ldots\ldots 0 \quad 1 \quad c_i/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad \ldots\ldots (y_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i - a_i\gamma_{i-1})$$

Avec $\gamma_i = c_i/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \qquad i = \overline{2, n-1}$

et $\beta_i = (y_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad i = \overline{2, n}$

On continue jusqu'à obtenir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & \\ & 1 & \gamma_2 & \cdots & & \\ & & 1 & \gamma_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \gamma_{n-2} & \\ & & \cdots & & 1 & \gamma_{n-1} \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{n-2} \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

La solution du système est facilement obtenue par substitution en arrière :

$$x_n = \beta_n$$

$$x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = \overline{n-1, 1}$$

En résumé, pour appliquer l'algorithme de Thomas on calcule

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{c_1}{b_1} \\ \gamma_i = c_i/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad i = \overline{2, n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{y_1}{b_1} \\ \beta_i = (y_i - a_i\beta_{i-1})/(b_i - a_i\gamma_{i-1}) \quad i = \overline{2, n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_n = \beta_n \\ x_i = \beta_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = \overline{n-1, 1} \end{cases}$$

Exemple : Soit le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Utiliser l'algorithme de Thomas pour résoudre le système.

2.4 Méthode de Crout-Dolitle ou LU

Cette méthode consiste à factoriser la matrice ***A*** pleine en deux matrices triangulaires ***L*** et ***U***, tel que ***L*** est triangulaire inférieure et ***U*** est triangulaire supérieure dont les éléments de la diagonale sont égaux à l'unité ($u_{ii} = 1$).

On a donc AX=B (1) et A=LU donc LUX=B, on pose UX=Y (Y vecteur inconnu), cela donne :

$$\begin{cases} LY = B \\ UX = Y \end{cases} \quad (2)$$

Le système (1) est décomposé en deux systèmes triangulaires faciles à résoudre (2). Le système à matrice triangulaire supérieure et résolue par substitution en arrière, celui à matrice triangulaire inférieure par substitution en avant.

2.4.1 Détermination des matrices L et U

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ l_{n-1,1} & l_{n-1,2} & \cdots & l_{n-1n-1} & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & & l_{nn-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{et } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & 1 & & u_{2n-2} & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & u_{n-1n} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de chaque matrice sont donnés par :

$$\begin{cases} l_{ki} = a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{kj} u_{ji} \\ u_{ik} = \left[a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_{jk}\right] / l_{ii} \end{cases} \quad i = 2,3,\dots,n \text{ et } k = i, i+1, \dots, n$$

En pratique pour calculer les éléments des deux matrices, on divise la tâche en plusieurs étapes. Par exemple dans l'étape i on détermine :

- La colonne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{L}$ en multipliant $\boldsymbol{L}$ par la colonne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{U}$.
- La ligne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{U}$ en multipliant la ligne $\boldsymbol{i}$ de $\boldsymbol{L}$ par $\boldsymbol{U}$.

Exemple : Utiliser la méthode de factorisation LU pour résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

2.5 Méthode de Choleski :

Cette méthode est applicable aux systèmes à matrices symétriques définies positives ($\boldsymbol{Det(A)} > \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{a_{ij}}$ réels). Cherchons une matrice $\boldsymbol{M}$ telle que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{MM^t}$ ou $\boldsymbol{M}$ est triangulaire inférieure et $\boldsymbol{M^t}$ la matrice transposée de $\boldsymbol{M}$.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n-1} & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & & m_{2n-2} & m_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & m_{n-1n-1} & m_{n-1n} \\ & & & 0 & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice ***M*** sont donnés par :

$$\begin{cases} m_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij}^2} \\ m_{ji} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} m_{ik}\, m_{jk} \right] / m_{ii} \end{cases} \quad i = \overline{1,n} \text{ et } j = \overline{i+1,n}$$

Exemple : Utiliser la méthode de factorisation de Choleski pour résoudre le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$