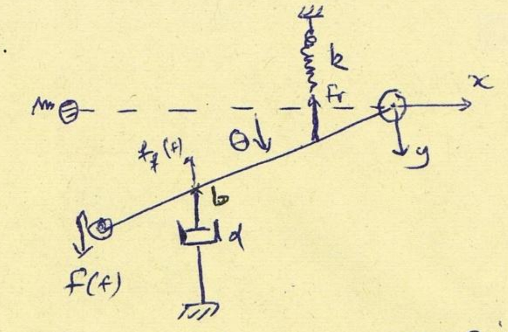
Solution de la série N° 4 (1)

Ondes et vibrations (2023/2024)

Exo1:



1_ L'équation de Lagrange en présence de la force d'amortissement et la force excitatrice f(t) est:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot\theta} = f_\theta(t)$$

D = fonction dissipation

$D = \frac{1}{2} P_d$ avec $P_d = -\frac{\delta W(\vec{f_f})}{\partial t}$

$P_d = -\vec{f_f}\cdot\frac{\delta \vec{OB}}{\partial t} = -\alpha\left(\frac{\delta \vec{OB}}{\partial t}\right)^2 = +\alpha b^2 \dot\theta^2$

alors: $D = \frac{1}{2}\alpha b^2 \dot\theta^2$ avec $b = \|\vec{OB}\| = \frac{3}{4} l$

$$f_\theta(t) = \frac{\delta W(\vec{F}(t))}{\partial \theta} = f(t)\, l \cos\theta \simeq \boxed{f(t)\, l}$$

et d'après l'exercice N° 6 (série N° 2)

on obtient finalement:

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{9}{16}\frac{\alpha}{m}\dot\theta + \frac{1}{16}\frac{k}{m}\theta = \frac{f_0}{ml}\cos\Omega t}$$

avec: $2\delta = \frac{9}{16}\frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{16}\frac{k}{m}$

2_ La résonance ds le système est possible si:

$\frac{\delta}{\omega_0} = \xi < \frac{1}{\sqrt2}$ or nous avons effectivement: $\frac{9}{8}\frac{\alpha}{\sqrt{km}} < \frac{1}{\sqrt2}$ $(0,25 < 0,70)$

donc la résonance peut avoir lieu

3_a_ La résonance se produira (2) pour $\Omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$

$= \boxed{10,45 \text{ rad } s^{-1}}$

3_b_ L'amplitude à la résonance

$$\left.\frac{d\theta_0}{d\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_R} = 0 \quad (\text{c-à-d } \theta_0 = (\theta_0)_{max})$$

alors:

$$(\theta_0)_{max} = \frac{F_0/ml}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega_R^2)^2 + (2\delta\Omega_R)^2}} = \boxed{0,023\frac{F_0}{l}}$$

$(\theta_0)_{max}$ proportionnelle à F_0

" inversement " " " l

EXo2

le ressort subit une déformation de ses deux extrémités: x du côté de la masse et x_e du côté du sol

alors:

$$f_r = -k(x - x_e)$$

de même l'amortisseur, qui en faisant déplacer ses deux extrémités avec des vitesse $\dot x$ et $\dot x_e$ respectivement alors:

$$f_f = -\alpha(\dot x - \dot x_e)$$

donc:

$$m\ddot x = f_r + f_f = -k(x - x_e) - \alpha(\dot x - \dot x_e)$$

$$\Rightarrow m\ddot x + \alpha\dot x + kx = kx_e + \alpha\dot x_e$$

et comme $x_e(t) = a\cos w_e t$ alors : (3)

$$\frac{k}{m}x_e + \frac{\alpha}{m}\dot{x}_e = C\cos(w_e t + \theta)$$ avec :

$$C = a\sqrt{w_0^4 + 4\delta^2 w_e^2}$$

$$tg\theta = \frac{2\delta w_e}{w_0^2}$$

donc l'eq diff sera :

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + w_0^2 x = C\cos(w_e t + \theta) \ldots\ldots (1)$$

la solution de cette eq est alors :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

avec : $x_h(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ on aura :

$$x(t) \simeq x_p(t) = A\cos(w_e t + \varphi)$$

tel que :

$$A = \frac{a\sqrt{w_0^4 + 4\delta^2 w_e^2}}{\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + (2\delta w_e)^2}}$$

$$tg\varphi = -\frac{2\delta w_e^3}{w_0^2(w_0^2 - w_e^2) + 4\delta^2 w_e^2}$$

pour determiner A et $tg\varphi$ on écrit (1) ds l'ensemble des nb Complex :

$$\ddot{\bar{x}} + 2\delta\dot{\bar{x}} + w_0^2\bar{x} = \bar{C}e^{jw_e t} \Big/ \bar{x}(t) = \bar{A}e^{jw_e t}$$

$$\Rightarrow \bar{A}(w_0^2 - w_e^2 + j2\delta w_e) = \bar{C}$$

d'où :

$$\bar{A} = \frac{\bar{C}}{w_0^2 - w_e^2 + j2\delta w_e}$$

$$A = \frac{C}{\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + (2\delta w_e)^2}}$$

$$tg\varphi = \frac{Im\,\bar{A}}{Re(\bar{A})} = -\frac{2\delta w_e^3}{w_0^2(w_0^2 - w_e^2) + (2\delta w_e)^2}$$

3- si δ et $w_e \ll$ alors (4)

$$4\delta^2 w_e^2 \ll w_0^4 \text{ et } w_e^2 \ll w_0^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A \simeq a} \text{ et } tg\varphi \simeq 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}$$

Exo3

1- $V_{Cmax} \simeq QE_0 \Rightarrow Q = \frac{V_{Cmax}}{E_0} = \frac{60}{3} = \boxed{20}$

2- $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{w_0}{2\delta}$

avec $2\delta = \frac{R}{L} = \frac{75}{98} \cdot 10^3 = \boxed{93750\ s^{-1}}$

d'où :

$$w_0 = 2\delta Q = \boxed{18{,}75 \cdot 10^5\ rad\ s^{-1}}$$

et comme $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow C = \frac{1}{Lw_0^2}$

$$\Rightarrow \boxed{C = 355{,}5\ pF}$$

3- $\Delta w = 2\delta = \boxed{93750\ s^{-1}}$

$$w_1 \simeq w_0 - \frac{\Delta w}{2} = 18{,}75 \cdot 10^5 - \frac{93750}{2}$$

$$= \boxed{18{,}28 \cdot 10^5\ rad\ s^{-1}}$$

$$w_2 = w_1 + \Delta w = \boxed{19{,}22 \cdot 10^5\ rad\ s^{-1}}$$

4- $P = \frac{1}{2}RI_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 75 \cdot (30 \cdot 10^{-3})^2$

$$= \boxed{0{,}034\ watt}.$$