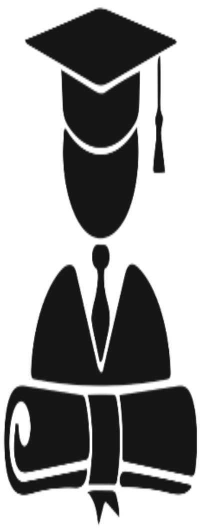
TP N°03 — Pendule couplée

Déroulement de l'expérience:

Volume horaire : 1^{h}30.

Compte rendu fait par :

	Nom & Prénom		Groupe
	**01**		
	02		
	03		
	04		
	05		
	06		
	07		
	08		
	09		
	10		

Objectifs

- Vérifier expérimentalement que le mouvement d'un système de deux pendules couplés peut être considéré comme une superposition de deux modes propres.

I. Pendule physique

Le pendule est constitué d'une barre de longueur l et de masse m qui peut osciller librement sous l'effet de son poids autour d'un axe O. La distance entre le centre de masse du pendule et l'axe de rotation est $l/2$**.**

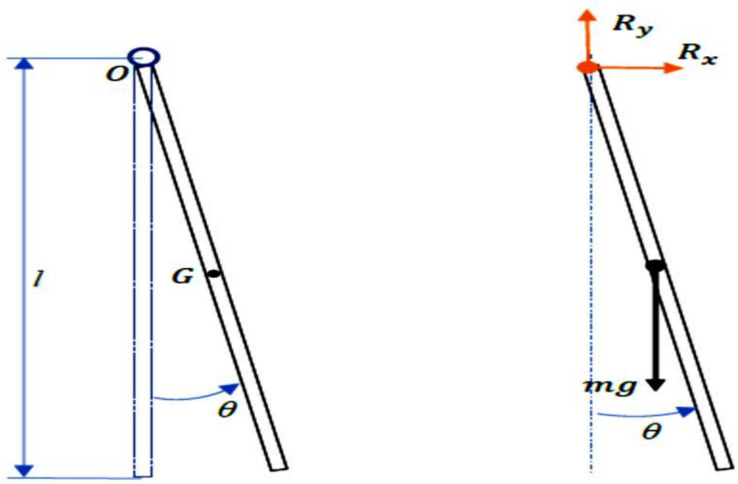


Diagramme du corps libre du pendule physique

<u>L'équation du mouvement</u>

On applique la 2ème loi de Newton des moments autour du point d'articulation O.

$$\sum \mathcal{M}_{/O} = J_O\, \alpha$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{f_r/_O}} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{f_r}$$
$$(\overrightarrow{\mathcal{M}_{P/_O}}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{mg}$$
$$(\mathcal{M}_{P/_O}) = -\frac{l}{2} mg.\sin\theta$$

(Les moments des forces de réactions R_x et R_y autour de O sont nuls).

$$J_O \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\frac{l}{2}\sin\theta$$

Pour de faibles amplitudes de vibration, on utilise les approximations : sin$\theta \approx \theta$, ce qui donne :

$$J_O\, \ddot{\theta} + \frac{mgl}{2}\theta = 0$$
$$\omega_n = \sqrt{\frac{mgl}{2J_O}}$$

La fréquence naturelle est

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

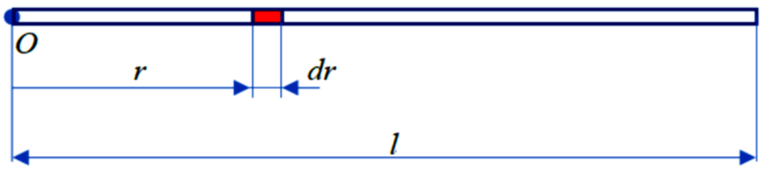
La pèriode est

$$T_n = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$$

Moment d'inertie

L'expression donnée pour $J = ml^2$ n'est valable que pour un pendule formé par une masse ponctuelle (pendule mathématique). Dans le cas où la masse a une certaine extension spatiale (pendule physique), il faut tenir compte de sa géométrie. Dans notre cas, le pendule est formé par une barre prismatique de longueur l. Donc le centre de masse ne se trouve au milieu de la barre. En plus, il faut tenir compte de la distribution de la masse au moment d'inertie total du pendule.

$$J = \int_0^l r^2\, dm$$



Ici, r est la distance entre un élément de masse dm et l'axe de rotation. $dm = \mu dr$; $\mu = m/l$ masse linéique

$$J_O = \int_0^l r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3}\frac{m}{l} r^3|_0^l = \frac{1}{3} ml^2$$

Pour le calcul du moment d'inertie par rapport au centre de masse d'une tige

$$J_G = \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3}\frac{m}{l} r^3|_{-l/2}^{+l/2} = \frac{1}{3}\frac{m}{l}\left(\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \left(-\frac{l}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{12} ml^2$$

Il est important de comprendre que le moment d'inertie dépend du choix de l'axe de rotation. Dans la pratique, il s'avère souvent plus facile de calculer le moment d'inertie JG par rapport à un axe qui passe par le centre de masse G d'un corps. Pour déterminer ensuite le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier, le théorème des axes parallèles (théorème de Huygens) Steiner s'applique :

$$J_O = J_G + md^2$$

où m est la masse totale du corps en rotation et d est la distance entre le centre de masse et l'axe de rotation.

Pour une barre de dimensions transversales négligeables devant la longueur

$$J_O = J_G + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

On distingue trois types fondamentaux d'oscillations.

Les conditions initiales :

$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$$
$$-\omega_1 A_1 \sin 0 + \omega_1 B_1 \cos 0 - \omega_2 A_2 \sin 0 + \omega_2 B_2 \cos 0 = 0$$
$$-\omega_1 A_1 \sin 0 + \omega_1 B_1 \cos 0 + \omega_2 A_2 \sin 0 - \omega_2 B_2 \cos 0 = 0$$
$$\omega_1 B_1 + \omega_2 B_2 = 0$$
$$\omega_1 B_1 - \omega_2 B_2 = 0$$
$$\Rightarrow B_1 = B_2 = 0$$

1. Oscillations symétriques

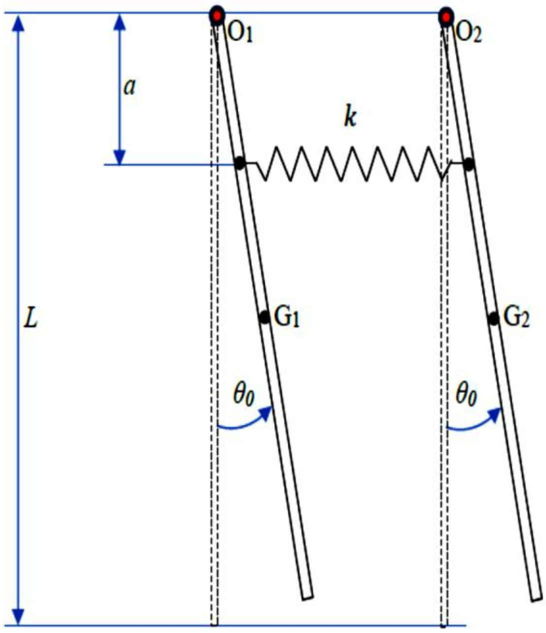
Conditions initiales :

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$$
$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$$

$$A_1 \cos 0 + A_2 \cos 0 = \theta_0$$
$$A_1 \cos 0 - A_2 \cos 0 = \theta_0$$

$$\Rightarrow A_1 = \theta_0 \quad \text{et} \quad A_2 = 0$$

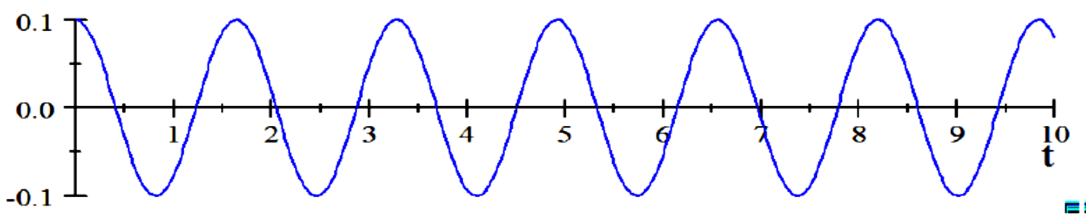
$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos \omega_1 t$$
$$\theta_2(t) = \theta_0 \cos \omega_1 t$$



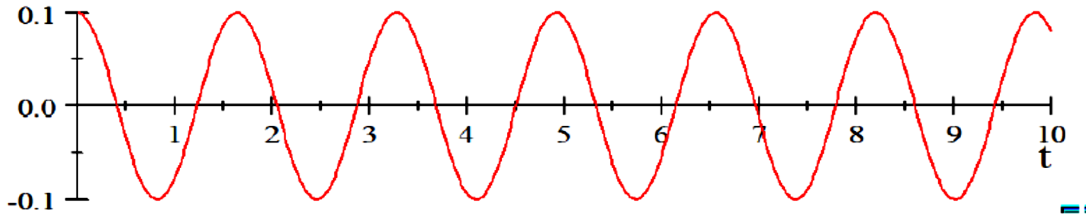
Il s'agit d'une oscillation à une seule fréquence. Le couplage ne joue aucun rôle***, puisque le ressort reste toujours dans le même état de tension***. Il est alors naturel qu'on retrouve la période du pendule physique.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

$$\theta_1(t) = 0.1\cos(3.834t)$$



$$\theta_2(t) = 0.1\cos(3.834t)$$



2. Oscillations antisymétriques

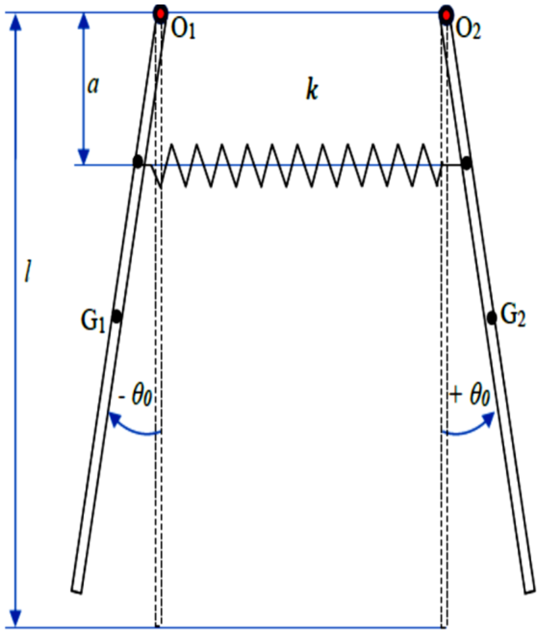
Conditions initiales :

$$\theta_1(0) = -\theta_0 \quad \text{et} \quad \theta_2(0) = \theta_0$$
$$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$$

$$A_1 \cos 0 + A_2 \cos 0 = -\theta_0$$
$$A_1 \cos 0 - A_2 \cos 0 = \theta_0$$

$$\Rightarrow A_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2 = -\theta_0$$

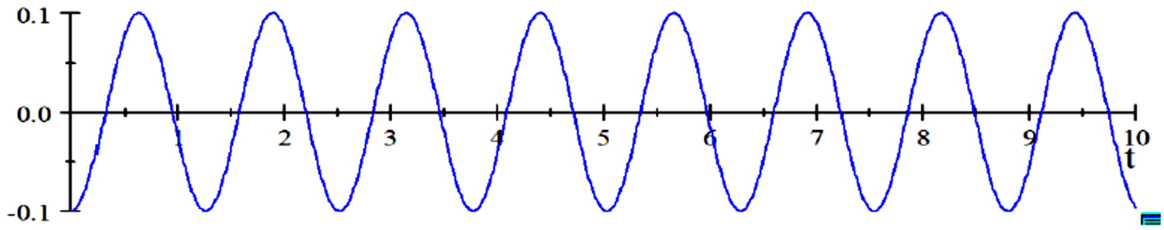
$$\theta_1(t) = -\theta_0 \cos \omega_2 t$$
$$\theta_2(t) = +\theta_0 \cos \omega_2 t$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l} + \frac{6ka^2}{ml^2}}$$



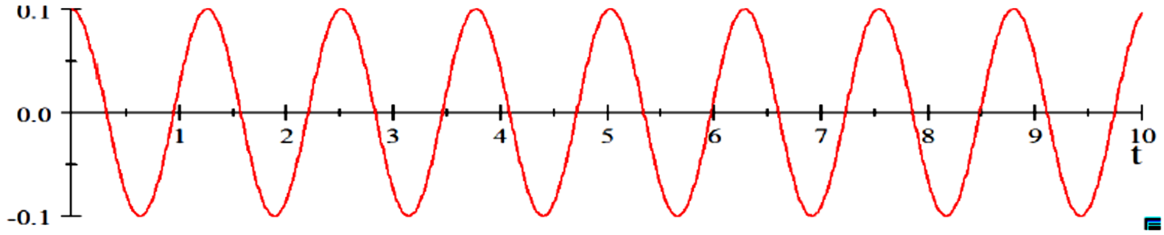
Il s'agit de nouveau d'une oscillation à une seule fréquence, mais le couplage entre les deux pendules résulte en une diminution de la période (**équivalent à une augmentation de la fréquence**).

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2ml^2}{3(mgl + 4ka^2)}}$$

$\theta_1(t) = -0.1\cos(5t)$



$\theta_1(t) = +0.1\cos(5t)$

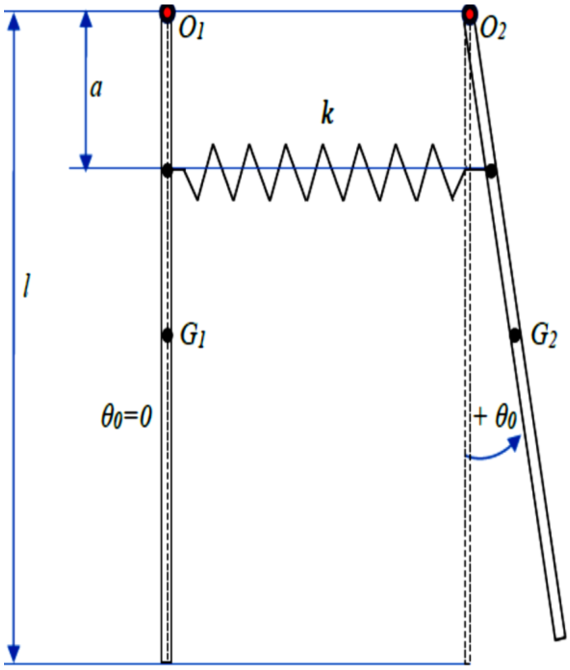


3. Oscillations avec battements

Conditions initiales

$\theta_1(0) = 0$ **et** $\theta_2(0) = +\theta_0$

$\dot{\theta}_1(t) = \dot{\theta}_2(t) = 0$



$$\theta_1(0) = A_1 \cos 0 + A_2 \cos 0 = 0$$

$$\theta_2(0) = A_1 \cos 0 - A_2 \cos 0 = \theta_0$$

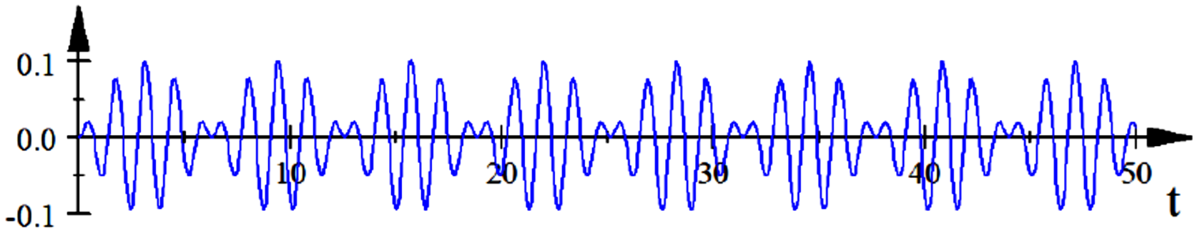
$$A_1 = +\theta_0/2$$

$$A_2 = -\theta_0/2$$

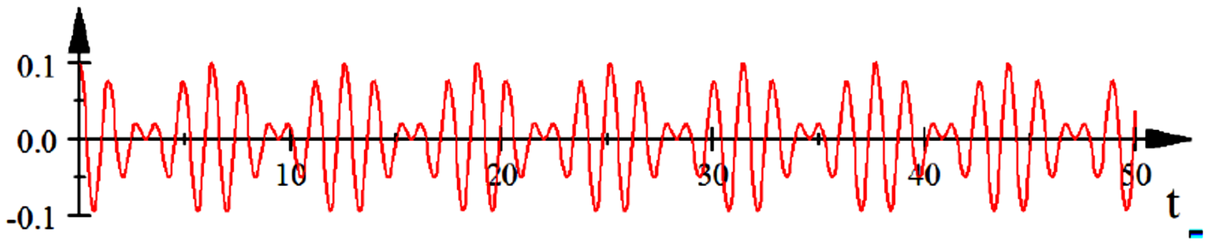
$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}\cos\omega_1 t - \frac{\theta_0}{2}\cos\omega_2 t$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}\cos\omega_1 t + \frac{\theta_0}{2}\cos\omega_2 t$$

$$\theta_1(t) = 0.05\cos(3.8t) - 0.05\cos(5t)$$



$$\theta_2(t) = 0.05\cos(3.8t) + 0.05\cos(5t)$$



Solution : En utilisant des relations trigonométriques on obtient

$$\theta_1(t) = \theta_0 \cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t) \times \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t)$$

$$\theta_2(t) = \theta_0 \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right) t \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right) t$$

Si le moment de force dû au couplage est faible vis-à-vis du moment de force dû au poids, alors $ka^2 \ll mgl$, et on voit que ω_1 est voisin de ω_2, c-à-d $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_2 + \omega_1$.

On observe que l'amplitude d'un des pendules, variant à la fréquence $\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)$, est modulée par la faible fréquence $\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)$. Le déphasage de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ entre le sinus et le cosinus traduit les battements entre les deux pendules : lorsqu'un pendule est à son amplitude maximale, l'autre est arrêté. L'énergie mécanique **passe progressivement** à chaque oscillation d'un des pendules sur l'autre par l'intermédiaire du **ressort de couplage**.

- La période d'oscillation τ vaut : $$\tau = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)} = \frac{2T_1T_2}{T_1+T_2}$$
- La période de battement Tb (qui correspond au temps compris entre trois arrêts consécutifs du même pendule). $$T_b = \frac{2\pi}{\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)} = \frac{2T_1T_2}{T_1-T_2}$$

On peut déterminer la constante de rappel k du ressort en mesurant les périodes $T1$ et $T2$ des pendules couplés.

$$k = \frac{mgl}{2a^2}\left(\frac{T_1^2}{T_2^2}-1\right)$$

Valeurs des fréquences pour différentes positions du ressort

Premier cas

$$a = \frac{l}{4}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}+6\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{3}{8}\frac{k}{m}}$$

Deuxième cas

$$a = \frac{l}{2}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}+6\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{3}{2}\frac{k}{m}}$$

Troisième cas

$$a = \frac{3l}{4}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}+6\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}+\frac{27}{8}\frac{k}{m}}$$

Travail demandé

- **Réaliser** le montage de l'oscillateur symétrique et antisymétrique précédemment figurés. Prenant (a = 28cm).

1- Calculer le moment d'inertie J_0 du pendule simple si :

$\boldsymbol{M} = 147{,}45g$, $\boldsymbol{m} = 1kg$, $\boldsymbol{l} = 96cm$, $L = 100cm$ et $\boldsymbol{g} = 9.8m/s^2$.

$\mathbf{J_0 = J_{Tige} + J_{masse}} =$

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

2- **Calculer** l'étirement pulsé **Δx** pour $m' = 50g$ et **déduire** le facteur de raideur k.

Δx = ……………………………………………………………………………

k = ………..……………………………………………………………………

3- A partir du logiciel de simulation **PASCO Capstone.**

- **Calculer** pour les deux oscillations symétrique et antisymétrique (T_1 et T_2) et **déduire** la moyenne des deux ($\overline{T}_1$ *et* $\overline{T}_2$) successivement.

Mesure	1	2	3	$\mathbf{T_{moyenne}}$
$\mathbf{T_1}$ (Symétrique)				$\overline{T}_1 =$ ………..
$\mathbf{T_2}$ (Antisymétrique)				$\overline{T}_2 =$ ………..

- **Calculer** pour l'oscillation avec battement les deux périodes (Γ et T_b)

« Théoriquement et après simulation ».

$\mathbf{\Gamma_{théor}} =$ ……………………………………………………………..

$\mathbf{\Gamma_{simul}} =$ ………….**s**

$\mathbf{T_{b\ théor}} =$ ……………………………………………………………

$\mathbf{T_{b\ simul}} =$ ………..**s**

4- **Déterminer** la constante de rappel k du ressort (Méthode dynamique).

k=……………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………