حل السلسلة الخامسة

(بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة – توزيع ستيودنت – توزيع كاي مربع – توزيع فيشر)

حل التمرين الأول:

التمرين : باستخدام جدول t أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة الإحصائية t للحالات التالية :

$t_{(0.20,11)}$; $t_{(0.01,5)}$; $t_{(0.80,12)}$; $t_{(0.75,10)}$; $t_{(0.95,20)}$

2- أوجد المساحة الواقعة على يسار t=-2.508 وعند درجة حرية 22 ؟

3- أوجد درجة الحرية لقيمة t= 2.518 والتي تقع على يمينها المساحة 0.01؟

4- ما هي قيمة المساحة التي تقابل حجم العينة 18 و t=3.646 ؟

5- إذا كان لدينا المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية 12، فأوجد احتمال أن تكون قيمته :

أ- أقل من 1.356 ؟

ب - أكبر من أو تساوي 3.930 ؟

ج - محصورة بين 1.083 و 2.179 ؟

الحل :

1- باستخدام جدول t وخاصية التناظر $t_{(\alpha,v)} = -t_{(1-\alpha,v)}$ نجد أن قيم الإحصائية t للحالات المطلوبة هي كالتالي :

$^*t_{(0.20,11)} = 0.876$

$^*t_{(0.01,5)} = 3.365$

$^*t_{(0.80,12)} = -t_{(1-0.80,12)} = -t_{(0.20,12)} = -0.873$

$^*t_{(0.75,10)} = -t_{(1-0.75,10)} = -t_{(0.25,10)} = -0.700$

$^*t_{(0.95,20)} = -t_{(1-0.95,20)} = -t_{(0.05,20)} = -1.725$

2- بما أن قيمة t سالبة فإننا نستخدم خاصية التناظر (لأنه لا توجد قيم سالبة في جدول t) أي:

$$t_{(\alpha,15)} = -t_{(1-\alpha,22)}$$

إن قيمة t=-2.508 تقابلها t=2.508 ومساحتها 0.99 وحيث أن المساحة المطلوبة هي على يسار 2.508- ،فيكون : $1 - \alpha = 0.99$ من الجدول، ومنه $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$ ،أي المساحة الواقعة على اليسار وعند درجة حرية 22هي 0.01 .

3- لدينا من خلال المعطيات : $t(0.01, v) = 2.518$ وبالتالي ومن خلال جدول t نجد أن درجة الحرية التي تحقق $t(0.01, v) = 2.518$ هي 21 أي أن : $v = 21$

4- لدينا $v = n - 1$ ،أي أن $v = 17$ و $t = 3.646$ وبالتالي ومن خلال جدول t فإن المساحة المقابلة هي 0.001 أي أن :

$$t_{(0.001,17)} = 3.646$$

5- حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير :

أ- أقل من 1.356:

$$P(X < 1.356) = 1 - P(X \geq 1.356) = 1 - 0.1 = 0.90$$

ب - أكبر من أو تساوي 3.930 :

$$P(X \geq 3.930) = 0.001$$

جـ - محصورة بين 1.083 و 2.179 :

$$P(1.083 \leq X \leq 2.179) = P(X \leq 2.179) - P(X \leq 1.083)$$
$$= [1 - P(X > 2.179)] - [1 - P(X > 1.083)] = (1 - 0.025) - (1 - 0.15) = 0.125$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(1.083 \leq X \leq 2.179) = P(X \geq 1.083) - P(X \geq 2.179) = 0.15 - 0.025 = 0.125$$

<u>حل التمرين الثاني:</u>

<u>التمرين :</u> باستخدام جدول χ^2 أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة الإحصائية χ^2 للحالات التالية :

$$\chi^2_{(0.05,10)};\quad \chi^2_{(0.25,16)};\quad \chi^2_{(0.90,6)};\quad \chi^2_{(0.995,18)}$$

2- إذا كانت لدينا القيمة $\chi^2 = 8.23$ عند درجة حرية 18، فما مقدار المساحة الواقعة على يسارها ؟

3- أوجد درجة الحرية لقيمة $\chi^2 = 5.90$ و $\chi^2 = 12.79$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.75 ؟

4- إذا كان حجم العينة هو 21 للمتغير X الذي يتبع توزيع كاي مربع، فأوجد احتمال أن تكون قيمته :

أ – أقل من 34.17 ؟

ب – أقل من 28.41 ؟

جـ - أكبر من أو تساوي 19.34 ؟

د – محصورة بين 19.34 و 34.17 ؟

5 – أحسب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي في السؤال الرابع ؟

<u>الحل :</u>

1- قيمة الإحصائية χ^2 للحالات التالية :

* $\chi^2_{(0.05,10)} = 18.31$

* $\chi^2_{(0.25,16)} = 19.37$

* $\chi^2_{(0.90,6)} = 2.20$

* $\chi^2_{(0.995,18)} = 6.26$

2- مقدار المساحة الواقعة على يسار القيمة $\chi^2 = 8.23$ عند درجة حرية 18:

نلاحظ أن المساحة التي تقع على يمين $\chi^2 = 8.23$ عند درجة حرية 18 هي $\alpha = 0.975$ وبالتالي فإن المساحة التي تقع على يسارها هي : $1 - \alpha = 1 - 0.975 = 0.025$.

3- إيجاد درجة الحرية لقيمة $\chi^2 = 5.90$ و $\chi^2 = 12.79$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.75 :

لدينا من خلال المعطيات : $\chi^2_{(0.75,v)} = 5.90$ وبالتالي ومن خلال جدول كاي مربع نجد أن درجة الحرية التي تحقق $\chi^2_{(0.75,v)} = 5.90$ هي 9 أي أن : $v = 9$.

و لدينا كذلك من خلال المعطيات : $\chi^2_{(0.75,v)} = 12.79$ وبالتالي ومن خلال جدول كاي مربع نجد أن درجة الحرية التي تحقق $\chi^2_{(0.75,v)} = 12.79$ هي 17 أي أن : $v = 17$.

4- حساب الاحتمالات :

X يخضع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية $v = n - 1 = 21 - 1 = 20$ ونكتب اختصارا : $X \rightsquigarrow \chi^2_{(20)}$

أ - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 34.17 :

$$P(X < 34.17) = 1 - P(X \geq 34.17) = 1 - 0.025 = 0.975$$

أ - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 28.41 :

$$P(X < 28.41) = 1 - P(X \geq 28.41) = 1 - 0.10 = 0.90$$

جـ – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أكبر من أو تساوي 19.34 :

$$P(X \geq 19.34) = 0.5$$

د – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير محصورة بين 19.34 و 34.17 :

$$P(19.34 \leq X \leq 34.17) = P(X \leq 34.17) - P(X \leq 19.34)$$
$$= [1 - P(X > 34.17)] - [1 - P(X > 19.34)] = (1 - 0.025) - (1 - 0.50) = 0.475$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

الفريق البيداغوجي للمقياس

$$P(19.34 \leq X \leq 34.17) = P(X \geq 19.34) - P(X \geq 34.17) = 0.50 - 0.025 = 0.475$$

5 – حساب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لمعطيات السؤال الرابع :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = v = 20$$

ب- التباين :

$$V(X) = 2v = 40$$

ج- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{40} = 6.32$$

<u>حل التمرين الثاني :</u>

<u>التمرين :</u> باستخدام جدول فيشر أجب على ما يلي :

1- ما هي قيمة الإحصائية F للحالات التالية :

$$F(0.05; 8; 14); \quad F(0.025; 5; 15); \quad F(0.95; 7; 10); \quad F(0.9; 6; 11)$$

2- أوجد درجات الحرية لقيمة $F = 6.62$ و $F = 3.51$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.01 ؟

3- إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = 8; v_2 = 14$، فأوجد احتمال أن تكون قيمته :

أ- أقل من 4.14 ؟

ب -أقل من 2.7 ؟

ج- أكبر من أو تساوي 3.29 ؟

د - محصورة بين 2.15 و 3.29 ؟

4 – أحسب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي في السؤال الثالث ؟

<u>الحل :</u>

1- باستخدام جدول F والقاعدة $F(\alpha; v_1; v_2) = \frac{1}{F(1-\alpha; v_2; v_1)}$ نجد أن قيم الإحصائية F للحالات المطلوبة هي كالتالي :

الفريق البيداغوجي للمقياس

* $F(0.05\ ;8\ ;14) = 2.70$

* $F(0.025\ ;5\ ;15) = 3.29$

* $F(0.95\ ;7\ ;10) = \frac{1}{F(1-0.95\ ;10\ ;7)} = \frac{1}{F(0.05\ ;10\ ;7)} = \frac{1}{3.64} = 0.274$

* $F(0.9; 6; 12) = \frac{1}{F(1-0.9;12;6)} = \frac{1}{F(0.1;12;6)} = \frac{1}{2.9} = 0.344$

2- أوجد درجات الحرية لقيمة $F = 6.62$ و $F = 3.51$ والتي تقع على يمينها المساحة 0.01 :

لدينا من خلال المعطيات : $F(0.01\ ;\ v_1; v_2) = 6.62$ وبالتالي ومن خلال جدول فيشر نجد أن درجتي الحرية التي تحقق $F(0.01\ ;\ v_1; v_2) = 6.62$ هي : $v_1 = 10; v_2 = 7$.

ولدينا من خلال المعطيات أيضا : $F(0.01\ ;\ v_1; v_2) = 3.51$ وبالتالي ومن خلال جدول فيشر نجد أن درجتي الحرية التي تحقق $F(0.01\ ;\ v_1; v_2) = 3.51$ هي : $v_1 = 8; v_2 = 21$

3- حساب الاحتمالات :

X يخضع لتوزيع فيشر بدرجتي حرية $v_1 = 8; v_2 = 14$ ونكتب اختصارا : $X \rightsquigarrow F(8; 14)$

أ - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 4.14 :

$$P(X < 4.14) = 1 - P(X \geq 4.14) = 1 - 0.01 = 0.99$$

ب - حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أقل من 2.7 :

$$P(X < 2.7) = 1 - P(X \geq 2.7) = 1 - 0.05 = 0.95$$

جـ – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير أكبر من أو تساوي 3.29 :

$$P(X \geq 3.29) = 0.025$$

د – حساب احتمال أن تكون قيمة المتغير محصورة بين 2.15 و 3.29 :

$$P(2.15 \leq X \leq 3.29) = P(X \leq 3.29) - P(X \leq 2.15) = [1 - P(X > 3.29)] - [1 - P(X > 2.15)]$$
$$= (1 - 0.025) - (1 - 0.10) = 0.075$$

ويمكن حسابها بطريقة ثانية كما يلي :

$$P(2.15 \leq X \leq 3.29) = P(X \geq 2.15) - P(X \geq 3.29) = 0.10 - 0.025 = 0.075$$

4 – حساب المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري لمعطيات السؤال الثالث :

الفريق البيداغوجي للمقياس

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X) = \frac{v_2}{v_2 - 2} = \frac{14}{12 - 2} = 1.166$$

ب- التباين :

$$V(X) = \frac{2(v_2)^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2} = \frac{2(14)^2(8 + 14 - 2)}{8(14 - 4)(14 - 2)^2} = \frac{7840}{13824} = 0.56$$

جـ- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.56} = 0.74$$