RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-

FACULTÉ DE THECHNOLOGIE

N° d'ordre: ....

Cours

Mathématiques 02

Spécialité:

ST

Par:

S.Benmerrouche

Thème

LES INTÉGRALES SIMPLES

Année Universitaire : 2021/ 2022

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 1: Les intégrales

1.1 Intégrale indéfinie

1.1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle Primitive de f toute foncion dérivable F vérifie $F' = f$ sur I.*

Exemple 1.1.1 *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x$ a pour primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$*

Proposition 1.1.1 *Soit f une fonction continue a pour primitive un fonction F, alors toute fonction $F + c$, où c est une constante, est une primitive à f*

Définition 1.1.2 *Soit f une fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On appelle* ***Intégrale indéfinie*** *de f l'ensemble de toutes les primitives de f.*

- L'intégrale indéfinie de f se note $\displaystyle\int f(x)dx$ où $\displaystyle\int$ est le signe d'intégration, $f(x)$ est l'intégrant, et dx est la notation differentielle.

A noter, x est la variable d'intégration. On peut écrire alors

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ où } F \text{ est une primitive particulière et } c \in \mathbb{R}$$

Exemple 1.1.2 $\displaystyle\int 2x dx = x^2 + c$ *où* $c \in \mathbb{R}$

Remarque 1.1.1 *La variable x est muette, si on remplaçait le x par t, par exemble, cela ne changerait rien au calcul*

$$\int \cos x dx = \sin x + c, \text{ et } \int \cos t dt = \sin t + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Properiétés Soit f, et g deux fonctions continues

1. $\int f'(x)dx = f(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
3. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$ pour tout scalaire λ

Les properiétés 3 et 4 donnent la linéarité de l'opérateur intégral.

1.1.2 Techniques de calcule de primitive

Intégration par identification

On regarde si l'on reconnait l'intégrant comme la dérivée d'une fonction (ou fonction composée) connue. Autrement dit

$$\text{Si } f(x) = F'(x) \text{ alors on a directement } \int f(x)dx = F(x) + c$$

Exemple 1.1.3 ***Exemple 2***

1)$\int \cos(x)\, dx =?$
on a $(\sin(x))' = \cos(x)$
donc $\int \cos(x)\, dx = \int (\sin(x))'\, dx = \sin(x) + c;\ \forall c \in \mathbb{R}$.
2)$\int \cos(x^2)\, 2x dx =?$
on a $(\sin(x^2))' = (\sin(u))' = u' \cos(u)$
donc $(\sin(x^2))' = 2x \cos(x^2)$ d'ou $\int \cos(x^2)\, 2x dx = \sin(x^2) + c$

Intégration par partie

Proposition 1.1.2 *Soient* $f.g \in I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions de class* C^1*sur* I *on a:*

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$$

Preuve. On a la dérivée d'un produit des fonctions $f(x) g(x)$

$(f(x) g(x))' = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$

$\int (f(x) g(x))' \, dx = \int f'(x) g(x) \, dx + \int f(x) g'(x) \, dx$

$\Longrightarrow \int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$ ■

L'idée est de choisir les fonctions f'et g formant l'intégrant tel que f' et f g'soient est plus faciles à intégrer.

Exemple 1.1.4 $I = \int x \sin(x) \, dx$

On intégre par partie

nous posons

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

$g'(x) = \sin(x) \qquad g(x) = -\cos(x)$

Alors

$I = -x\cos(x) + \int \cos(x) \, dx$

$I = -x\cos(x) + \sin(x) + c$ tel que c constante d'intégrale

Remarque 1.1.2 *La méthode de l'intégration par partie s'emploie fréquement dans le calcul des intégrales de la forme*

$$\int x^k \sin(x) \, dx, \quad \int x^k \cos(x) \, dx, \quad \int x^k e^{\alpha x} dx, \quad \int x^k \ln(x) \, dx.$$

Intégration par changement de variable

Si le calcul de l'intégrale $\int f(x) \, dx$ s'avére difficile.

On remplace le variable x par $\varphi(t)$ dérivable, et donc $dx = \varphi'(t) \, dt$ et on aura

$$\int f(x) \, dx = \int f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt$$

Exemple 1.1.5 $I = \int \sin(x)\cos(x)\,dx$

On pose $t = \sin(x) \qquad dt = \cos(x)\,dx$

$I = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}\cos^2(x) + c$

Remarque 1.1.3 $\int \dfrac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \dfrac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|g(x) + c|$

En effet, on pose: $t = g(x) \Longrightarrow dt = g'(x)\,dx$

Le succès de l'intégration dépend de notre habilité à choisir le changement de variable approprié qui simplifiera les calculs.

1.1.3 Intégration des fonctions rationnelles

Définition 1.1.3 *Une fraction (ou fonction) rationnelle est une fonction de la forme* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *ou le numérateur* $p(x)$ *,et le dénominateur* $q(x)$ *. sont deux fonctions polynômes tel que* $(q(x) \neq 0)$

Intégration des fonctions rationnelles

Soit $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{ax^2 + bx + c}$ tel que $(\alpha, \beta, a, b, c) \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.

On distingue trois cas

Premier cas: si $\triangle = b^2 - 4ac > 0$, le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Alors $f(x)$ s'écrit à la forme:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a((x - x_1)(x - x_2))}$$

Alors il existe deux nombres réelles $A, B \in \mathbb{R}$ tel que;

$f(x) = \dfrac{A}{(x - x_1)} + \dfrac{B}{(x - x_2)}$

alors

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx = &\int \tfrac{A}{(x-x_1)}dx + \int \tfrac{B}{(x-x_2)}dx \\ &= A\int \tfrac{dx}{(x-x_1)} + B\int \tfrac{dx}{(x-x_2)} \\ &= A\ln|x - x_1| + B\ln|x - x_2| + c \end{aligned}$$

Exemple 1.1.6 $\int \dfrac{2x+3}{x^2 - x - 2}dx = \int \dfrac{2x+3}{(x+1)(x-2)}dx = \int \dfrac{A}{(x+1)}dx + \int \dfrac{B}{(x-2)}dx$

On doit trouver les coefficients A, B

On détermine Aet B ,on multiplie par $(x - x_{1,2})$ puis on prend $x_{1,2}$

pour trouver A on multiple par $(x+1)$ puis on prend $x_1 = -1$
on trouve $\dfrac{2x+3}{(x-2)} = A + \frac{B}{(x-2)}(x+1) \Longrightarrow A = \frac{2(-1)+3}{(-1-2)} = \frac{-1}{3}$
pour trouver B on multiplie $(x-2)$ puis on prend $x_1 = 2$
On trouve $\frac{2x+3}{(x+1)} = \frac{B}{(x+1)}(x-2) + B \Longrightarrow A = \frac{2(2)+3}{(2+1)} = \frac{7}{3}$
$\int \frac{2x+3}{x^2-x-2}dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{7}{3}\int \frac{dx}{(x-2)}$
$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{7}{3}\ln|x-2| + c.$

Deuxieme cas: Si $\triangle = b^2 - 4ac = 0$. Dans ce cas le dénominateur ax^2+bx+c possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.

Alors $f(x)$ s'écrit à la forme

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{a(x-x_0)^2}$$

Donc il existe deux nombres A et $B \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{(x-x_0)}$$

$$\int f(x)\,dx = A\int \frac{dx}{(x-x_0)^2} + B\int \frac{dx}{(x-x_0)} = -\frac{A}{(x-x_0)} + B\ln|x-x_0| + c$$

Exemple 1.1.7 *Calculer* $\int \dfrac{5x+6}{x^2+2x+1}dx$

$\int \dfrac{5x+6}{x^2+2x+1}dx = \int \dfrac{5x+6}{(x+1)^2}dx = \int \dfrac{A}{(x+1)^2}dx + \int \dfrac{B}{(x+1)}dx$
par des calcules, on trouve $A = 1, B = 5$
Alors $\int \dfrac{5x+6}{(x+1)^2}dx = \int \dfrac{1}{(x+1)^2}dx + \int \dfrac{5}{(x+1)}dx = -\dfrac{1}{(x+1)} + 5\ln|x+1| + c$
Troisiéme cas: Si $\triangle = b^2 - 4ac < 0$ Dans ce cas le dénomirateur ax^2+bx+c ne posséde pas des racines réelles.

Donc la fraction n a pas une fraction rationnelle mais a une fraction irrationnelle de la fome

$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$

Exemple 1.1.8 $I = \int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx$

Dans un premier temps, on fait apparaître une fraction du type: $\dfrac{f'}{f}$

$I=\frac{1}{2}\int\dfrac{2x+8}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\int\dfrac{2x+2}{x^2+2x+5}dx+3\int\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$

Alors $I=I_1+I_2$

$I_1=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|$

et

$I_2=\int\dfrac{dx}{x^2+2x+5}$

on remarque que le dénominateur x^2+2x+5 ne possède pas des racines réelles car $\Delta=-16<0$.

alors on applique la formule

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

on a $a=1$, $b=2$ et $c=5$ d'ou $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=(x+1)^2+4$

$I_2=\int\dfrac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\int\dfrac{dx}{\left(\dfrac{(x+1)}{2}\right)^2+1}$

On pose $t=\frac{1}{2}(x+1)\Rightarrow dt=\dfrac{1}{2}dx\Rightarrow dx=2dt$

alors $I_2=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\arctan(t)=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)$

donc

$$I=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right|+\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}(x+1)\right)+c$$

Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples

Proposition 1.1.3 *Une fraction rationnelle* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ *se décompose en une partie entière en effectuant la dévision de $p(x)$ par $q(x)$ si le dégré de p est supérieure au dégré de q, et une partie des fractions partielles tel que: Chaque facteur irrédictible de dégrée 1 de la forme $(ax+b)^k$ au dénominateur engendre dans la décomposition k fractions partielles de la forme*

$$\frac{A_1}{(ax+b)}+\frac{A_1}{(ax+b)^2}+\ldots+\frac{A_1}{(ax+b)^k},\ \text{avec } A_i\in\mathbb{R}$$

Chaque Chaque facteur irrédictible de dégrée 2 de la forme $(ax^2+bx+c)^k$ *au dénominateur engendre dans la décomposition* k *fractions partielles de la forme*

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k},\ \textit{avec } A_i,B_i\in\mathbb{R}$$

Exemple 1.1.9 $\dfrac{x}{x(x-1)^2}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{(x-1)}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

$$\frac{2x}{x^2+2x+1}=\frac{2x}{(x+1)^2}=\frac{a}{(x+1)}+\frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x-3}{x(x^2+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{(x^2+1)}+\frac{dx+e}{(x^2+1)}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{(x^2-1)(x^2-4x+5)} &= \frac{x^5}{(x-1)(x+1)(x^2-4x+5)}\\ &= x+4+\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{Cx+D}{(x^2-4x+5)}\end{aligned}$$

A) Intégration des éléments simples $\frac{A}{(x-x_0)^n}$

Si $n=1$ alors; $\int\dfrac{A}{(x-x_0)^n}dx=A\ln|x-x_0|+c$

Si $n\geq 2$ alors; $\int\dfrac{A}{(x-x_0)^n}dx=\dfrac{A}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}}+c$

B) Intégration d'élément simple $\dfrac{Bx+c}{(ax^2+bx+c)^n}$

$$\frac{Bx+c}{(ax^2+bx+c)^n}=\alpha\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}+\delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$$\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}=\int\frac{u'}{u^n}dx=\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$$

$$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

si $n=1\Rightarrow\int\dfrac{dx}{ax^2+bx+c}$ cette intégrale est de type

$$\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan(t)+c$$

si $n\geq 2\Rightarrow\int\dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)}$ de type $I_n=\int\dfrac{du}{(1+u^2)^n}$

On intégre par partie permet de passer de I_k à I_{k-1}

Primitive de $p(x)e^{\alpha x}$

On veut calculer $\int p(x)e^{\alpha x}dx$, où p est un polynôme et α un scalaire.

On peut procéder par intégration par parties successives, si deg $p(x)$ n'est pas trop grand. Il est souvent préférable d'utiliser une méthode de coefficients indéterminés, et chercher une primitive de $p(x)e^{\alpha x}$ sous la forme $\Phi(x)e^{\alpha x}$avec deg $p(x) = \deg \Phi(x)$

Intégration des fonctions trigonomitriques

Intégrale de la forme $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$ L'intégrale qui est un produit de deux fonctions trigonométriques peuvent être transformés en un somme de fonctions

trigonométriques; on utilise des formules suivantes

$\sin(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x)$

$\sin(\alpha x)\sin(\beta x) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x)$

$\cos(\alpha x)\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x)$

Intégrale de la forme $\int \cos^p(x)\cos^q(x)\,dx$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ Premier cas

Si p est impair $(p = 2k+1)\,(k \in \mathbb{N}^*)$

Dans ce cas on pose $y = \sin(x) \Rightarrow dy = \cos(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx &= \int \cos^{(2k+1)}(x)\sin^q(x)\,dx \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^k \cos(x)\sin^q(x)\,dx \\
&= \int \left(\cos^2(x)\right)^k \sin^q(x)\cos(x)\,dx \\
&= \int \left(1-\sin^2(x)\right)^k \sin^q(x)\cos(x)\,dx
\end{aligned}$$

Changement de variable: on pose $t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\,dx$

Alors

$\int \left(1-\sin^2(x)\right)^k \sin(x)\cos(x)\,dx = \int (1-t^2)\,t^q dt$

Deuxième cas

Si q impaire, $q = 2k+1$

$$\begin{aligned}
\int \cos^p(x)\sin^q(x)\,dx &= \int \cos^p(x)\sin^{(2k+1)}(x)\,dx \\
&= \int \cos^p(x)\left(\sin^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx \\
&= \int \cos^p(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx
\end{aligned}$$

Changement de variable: on pose $t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\,dx$

$\int \cos^p(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^k \sin(x)\,dx = -\int t^p\left(1-t^2\right)^k dt$

Troisième cas

Si p et q sont pairs

On utilise les formules suivantes

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

alors

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx &= \int \tfrac{1}{2}(1+\cos(2x))\tfrac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\int (1-\cos^2(2x))\,dx\end{aligned}$$

On'a $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \Rightarrow \cos^2(2x) = \frac{1}{2}(1+\cos(4x))$

donc

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx &= \tfrac{1}{4}\int 1 - \tfrac{1}{2}(1+\cos(4x))\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{1}{8}\sin(4x)\right) + c\end{aligned}$$

Transformation en une intégrale de fractions rationnelles Changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Soit une intégrale de la forme $\int f(\sin(x), \cos(x))\,dx$;En effectuant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

les fonctions $\sin(x)$; $\cos(x)$;s'expriment alors sous la forme de fonctions rationnelles

Avec $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on'a

$$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Exemple 1.1.10 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{2t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\left(\tfrac{x}{2}\right)\right| + c,\ c \in \mathbb{R}$

Les règles de Bioche On note $\Psi(x) = f(x)\,dx$ on a alors

$\Psi(-x) = f(-x)\,d(-x) = -f(-x)$ et

$\Psi(\pi - x) = f(\pi - x)\,d(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$

si $\Psi(-x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos(x)$ (i.e f est pair) si $\Psi(\pi - x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin(x)$

si $\Psi(\pi + x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan(x)$.

Exemple 1.1.11 $\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx$

On note $\Psi(x) = \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx$.Comme $\Psi(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{2 - \cos^2(\pi - x)} d(\pi - x) = \frac{-\cos(x)}{2 - \cos^2(x)} - d(x) = \Psi(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin(x)$ pour lequel $du = \cos x dx$. Ainsi

$\int \frac{\cos x}{2 - \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{2 - \left(1 - \sin^2 x\right)} dx = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan(u) + c = \arctan(\sin x) + c,$
$c \in \mathbb{R}$

1.2 Intégrale définie

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, est soient $a, b \in I$,alors on pose ;

$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

pour que ce nombre représente l'aire comprise entre le graphe de f .

L'axe on,et les droites verticales $x = a, y = b$

Exemple

$\int_0^{\frac{3}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{9}{8} - 0 = \frac{9}{8}$

1.2.1 Intégrale de Riemann

Dans la présentation de l'intégrale de Remann, les fonctions en escalier jouent un role primordial. Nous commençons par donner leurs propriétés et nous définissions leurs intégrales.

Fonctions en escalier

Définition 1.2.1 *On appelle* ***subdivision*** *de l'intérvalle compact (i.e fermé et borné)* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *un ensemble fini de points*

$x_0, x_1, x_2, ...x_n$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

On remarque que $x_i - x_{i-1} > 0, \forall i = 1, ..., n$ .On appelle pas de la subdivision le réel $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$

Définition 2-2

Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* .S'il existe une subdivision$\{x_0 \ , x_1, x_2, ..., x_n\}$de $[a, b]$ tel que f soit constant

sur chaque intervalle$]x_{i-1}, x_i[\ , i = 1, 2, ...n.$

Une fonction est dite en escalier sur $\mathbb{R}$ s'il existe un intervalle $[a, b]$ .tel que f soit nulle en dehors de $[a, b]$ et en escalier sur $[a, b]$

Exemple

1) la foction f définie sur $[0, 1]$ par;

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 si x = 0 \\ \frac{1}{2} si x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 3 si x = \frac{1}{2} \\ 1 si x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right|$$

Alors f est une fonction escalier sur $[0, 1]$

2) La fonction constante sur $[a, b]$,c'est une fonction escalier sur $[a, b]$.

Intégrale des fonctions en escalier

Définition

Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$.

$f(x) = c_1 \qquad x \in \left]x_{i-1}, x_i\right[\ , i = 1, 2, ...n$

On appelle intégrale de f sur $[a, b]$, le nombre

$$I(f) = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} c_1 (x_1 - x_0) + c_2 (x_2 - x_1) + ... + c_n (x_n - x_{n-1})$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i - x_{i-1})$$

S_n est appelle la somme de Riemann de f sur $[a, b]$,et on note ce nombre $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$

Remarque

1) Le nombre $I(f)$ ne dépend que de f et nom de la subdivision

2) $I(f)$ ne dépend pas de x.

3) Soit f une fonctionen escalier sur $[a, b]$ et $f \geq 0$ alors

$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \nRightarrow f = 0$

4) $\int_a^b f(x)\,dx$ ne dépend pas des valeurs prises pas f aux points de la subdivisions.

Exemple

1)$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = c$

alors :$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,c$

2) considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 si x = 0 \\ \frac{1}{2} si x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ 3 si x = \frac{1}{2} \\ 1 si x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[\end{array} \right|$$

alors $\int_0^1 f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 0\right) + 1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

proposition 1 (linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ et λ une constante réelle donnée .Alors, on a

1)$\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b (f)(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

proposition 2 (croissance de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a, b]$; alors on a

1) $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0 \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2)$\forall x \in [a, b], f(x) \geq g(x) \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\forall u \in [a, b] : \int_u^u f(x)\,dx = 0 \nRightarrow f = 0$

4)$\forall u, v \in [a, b] : u\langle v, \int_u^v f(x)\,dx = -\int_v^u f(x)\,dx$

5) Si c$\in\,]a, b[$ on a alors: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$