المحور الأول

تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

تمهيد :

بعد تطرقنا في المحور الأول إلى أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة وأهم القوانين المتعلقة بها، وكذلك أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة في المحور الثاني، سنحاول في هذا المحور التطرق إلى موضوع التقارب بين بعض التوزيعات، حيث سنتناول التقارب بين بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، ومن ثم التقارب بين بعض التوزيعات الاحتمالية المنفصلة والتوزيع الطبيعي.

أولا : التقارب بين توزيع بواسون وتوزيع ثنائي الحدين

يعتبر توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذو الحدين، وعليه تجدر الاشارة إلى أن توزيع ذو الحدين يمكن أن يقرب لتوزيع بواسون بحيث تكون $\lambda = np$ وذلك عندما تكون n كبيرة، ويكون p قريب من الصفر (أي أن q=1-p قريب من 1)،بينما [n>30,np<5 or n(1-p)>5] ، ويكون التوزيع الثنائي قريبا جدا من التوزيع البواسوني الذي يمكن استخدامه كتقريب ممتاز للتوزيع الثنائي.

مثال 01:

نفرض أن هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب به 500 صفحة،

1- أوجد الاحتمالات التالية : أ – أن لا تحتوي صفحة معينة على أية خطأ ؟

ب- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط ؟ ج- أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر ؟

2- أحسب المتوسط و الانحراف المعياري للتوزيع؟

الحل :

سوف ننظر إلى عدد الأخطاء في الصفحة على أنه عدد مرات النجاح في متتابعة من تجارب برنولي، في هذا المثال n=300 حيث أنه يوجد 300 خطأ مطبعي و $p = \frac{1}{500}$ هو احتمال أن يظهر خطأ في الصفحة المعينة، حيث أن p صغيرة فسوف نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 300.\frac{1}{500} = 0.6$ وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0.6}0.6^x}{x!}$$

1- حساب الاحتمالات التالية :

أ – أن لا تحتوي أية صفحة معينة على خطأ :

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.6}0.6^0}{0!} = 0.549$$

ب- أن تحتوي صفحة معينة على خطأ بالضبط :

$$P(X=1)=\frac{e^{-0.6}0.6^{1}}{1!}=0.329$$

جـ- أن تحتوي صفحة معينة على خطأين أو أكثر :

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-[0.549+0.329]=0.122$$

2- حساب المتوسط والانحراف المعياري للتوزيع :

أ- التوقع الرياضي :

$$E(X)=\lambda=0.6$$

ب- التباين :

$$V(X)=\lambda=0.6$$

جـ- الانحراف المعياري :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\lambda}=\sqrt{0.6}=0.77$$

مثال 02:

توضح الخبرة الماضية أن **1%** من مصابيح الكهرباء المنتجة في مصنع ما هي مصابيح معيبة . في عينة من **30** مصباح ، أوجد احتمال وجود أكثر من مصباح معيب باستخدام (أ) توزيع ذو الحدين (ب) توزيع بواسون كتقريب لذو الحدين .

الحل :

1- أ- حساب احتمال وجود أكثرمن مصباح معيب باستخدام توزيع ذو الحدين :

بما أن عدد المحاولات معلوم (n=30) ، واحتمال النجاح ثابت في كل تجربة (p=0.01) (التجارب مستقلة) فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين الذي دالته الاحتمالية :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\mathrm{C}_{30}^{\mathrm{x}}(0.01)^{\mathrm{x}}(0.99)^{30-\mathrm{x}}\qquad \mathrm{X}=0,1,2,3,..,30$$

$$P(X>1)=P(X=2)+P(X=3)+\cdots+P(X=30)$$

$$P(X>1)=1-P(X\leq 1)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$P(X>1)=1-\left[\mathrm{C}_{30}^{0}(0.01)^{0}(0.99)^{30-0}+\mathrm{C}_{30}^{1}(0.01)^{1}(0.99)^{30-1}\right]=1-(0.7397+0.2241)$$
$$=0.0361$$

1-ب- حساب احتمال وجود أكثرمن مصباح معيب باستخدام توزيع بواسون :

بما أن p صغيرة فيمكن أن نستعمل تقريب بواسون للتوزيع ذي الحدين ويكون $\lambda = np = 30 * 0.01 = 0.3$. وتكون الدالة الاحتمالية لهذا التوزيع على النحو التالي :

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0.3}0.3^x}{x!}$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0.3}0.3^1}{1!} = (2.3)(0.74082) = 0.222246$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-0.3}0.3^0}{0!} = e^{-0.3} = 0.74082$$
$$P(X \le 1) = P(X = 1) + P(X = 0) = 0.222246 + 0.74082 = 0.963066$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \le 1) = 1 - 0.963066 = 0.036934, \text{ or } 3.69\%$$

2- الاستنتاج: يمكن تقريب توزيع ثنائي الحدين من توزيع بواسون، وذلك عندما تكون p صغيرة و n كبيرة، وعموما نقوم بالتقرب إذا تحقق: $p \le 0{,}05$ و $n \ge 30$.

ثانيا : تقريب التوزيع فوق الهندسي من توزيع ثنائي الحدين

إذا كان حجم العينة n صغير جدا مقارنة بحجم المجتمع N، فإن معامل الشمولية $\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$ يؤول إلى الواحد، وتصبح قيمة التباين لهذا التوزيع تساوي قيمة التباين التي توصلنا إليها من قانون ثنائي الحدين، وبالتالي كقاعدة عامة، إذا كان $\left(\frac{n}{N} \le 0.05\right)$ فإننا نقرب توزيع فوق الهندسي من التوزيع ثنائي الحدين، أي نستخدم قانون ثنائي الحدين لحساب الاحتمالات بدل قانون فوق الهندسي، أي :

$$X \to H(N, N_1, n) \longrightarrow X \to B(n, p)$$

مثال 03 : صندوق به 100 كرية منها 60 بيضاء و40 حمراء، نسحب بدون إرجاع 3 كريات، أحسب احتمال الحصول على :

1- كريتين بيضاوين ؟
2- ولا كرة بيضاء ؟
3- كريتين بيضاوين على الأقل ؟
4- كريتين بيضاوين على الأكثر ؟

الحل :

القانون الأصلي هو قانون فوق الهندسي، $X \to H(100,60,3)$

لكن لدينا : $\left(\frac{n}{N} = \frac{3}{100} = 0.03 \le 0.05\right)$ وبالتالي نقرب قانون فوق الهندسي من قانون ثنائي الحدين أي :

$X \to B(3{,}0.6)$ أي : $X \to B(4{,}0.7)$ وتصبح دالة الكثافة الاحتمالية على النحو التالي :

$$P(X = x) = C_3^x (0.6)^x (0.4)^{3-x} \qquad x = 0{,}1{,}2{,}3$$

1- حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين :

$$\mathrm{P(X = 2) = C_3^2 (0.6)^2 (0.4)^1 = 0.432}$$

2- حساب احتمال عدم الحصول على أية كرة بيضاء :

$$\mathrm{P(X = 0) = C_3^0 (0.6)^0 (0.4)^3 = (0.4)^3 = 0.064}$$

3- حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين على الأقل :

$$\mathrm{P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.432 + C_3^3 (0.6)^3 (0.4)^0 = 0.432 + 0.216 = 0.648}$$

4 - حساب احتمال الحصول على كريتين بيضاوين على الأكثر :

$$\mathrm{P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.064 + C_3^1 (0.6)^1 (0.4)^2 + 0.432}$$
$$= 0.064 + 0.0768 + 0.432 = 0.5728$$

ثالثا : التقريب الطبيعي لتوزيع ثنائي الحدين

يستخدم التوزيع الطبيعي (وهو توزيع مستمر) لتقريب توزيع ثنائي الحدين (وهو توزيع متقطع)، وذلك عندما يكون عدد المحاولات n كبير $n \geq 30$ ، ولم تكن كل من p أو q قريبة من الصفر أي $P \approx 0.5$ ، أو عندما تكون $n.p > 5$ و $n.q > 5$ وذلك لسهولة إيجاد قيم الاحتمالات باستخدام الجداول وصعوبة حساب صيغ C_n^x لقيم $n \geq 30$، ونكتب :

$$B(n, P) \sim N(\mu = np, \sigma^2 = n.p.q)$$

ويكون :

$$P(X = x) \approx P\left(\frac{x - n.p - 0.5}{\sqrt{n.p.q}} \leq Z \leq \frac{x - n.p + 0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right) \approx P\left(\frac{x - \mu - 0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$$

$$P(X < x) \approx P\left(Z < \frac{x - n.p - 0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

$$P(X \leq x) \approx P\left(Z < \frac{x - n.p + 0.5}{\sqrt{n.p.q}}\right)$$

حيث : $Z \sim N(0{,}1)$

مثال 04 :

ألقيت قطعة نقدية 12مرة، أحسب احتمال أن نحصل على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 بما في ذلك 4 و 7 باستخدام :

1 – التوزيع ثنائي الحدين ؟

2 – التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي ؟

الحل :

1- حساب احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 باستخدام توزيع ثنائي الحدين :

بما أن عدد المحاولات معلوم، واحتمال النجاح ثابت في كل المحاولات، فإن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ثنائي الحدين حيث $n = 12$ و $p = 0.5$ و $q = 0.5$ ونكتب اختصارا $X \sim B(12,0.5)$ وتكون دالته الاحتمالية على النحو التالي :

$$P(X = x) = C_{12}^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-x} \quad x = 0,1,2,3, \dots ,12$$

$$P(4 \le X \le 7) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(X = 4) = C_{12}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-4} = \frac{495}{4096}$$

$$P(X = 5) = C_{12}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-5} = \frac{792}{4096}$$

$$P(X = 6) = C_{12}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-6} = \frac{924}{4096}$$

$$P(X = 7) = C_{12}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{12-7} = \frac{792}{4096}$$

ومنه نجد الاحتمال المطلوب :

$$P(4 \le X \le 7) = \frac{495}{4096} + \frac{792}{4096} + \frac{924}{4096} + \frac{792}{4096} = \frac{3003}{4096} = 0.7332$$

2- حساب احتمال الحصول على الصورة عددا من المرات يتراوح بين 4 و 7 باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب للتوزيع الثنائي :

في هذا المثال لدينا : $\mu = 12.\frac{1}{2} = 6$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{12.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 1.73$ وباستخدام علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ نجد :

$$\mathrm{P}(4 \leq \mathrm{X} \leq 7) \approx P\left(\frac{4-6-0.5}{1.73} \leq Z \leq \frac{7-6+0.5}{1.73}\right) = P(-1.445 \leq Z \leq 0.867)$$
$$= P(-1.445 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.867) = 0.4251 + 0.3078 = 0.7329$$

مثال 05 :

ألقي حجر نرد 180 مرة، أحسب احتمال أن يظهر الرقم 6 :

1- من 29 إلى 32 مرة بما في ذلك 29 و 32 ؟

2- من 31 إلى 35 مرة بما في ذلك 31 و 35 ؟

الحل :

1 – حساب احتمال أن يظهر الرقم 6 من 29 إلى 32 مرة بما في ذلك 29 و 32 :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية المكررة تتبع قانون ثنائي الحدين، لكن عند استخدامه فإن القيام بالعمليات الحسابية يكون صعبا جدا، لذلك يتم استخدام قانون التوزيع الطبيعي كتقريب لقانون ثنائي الحد، لأن شروط التقريب متوفرة، حيث :

$n.p > 5$ و $n.q > 5$ و$n > 30$.

في هذا المثال لدينا : $\mu = 180.\frac{1}{6} = 30$ وأيضا $\sigma = \sqrt{n.p.q} = \sqrt{180.\frac{1}{6}.\frac{5}{6}} = 5$ وباستخدام علاقة التقريب بين التوزيع الطبيعي وتوزيع ثنائي الحدين $P\left(\frac{x-\mu-0.5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{x-\mu+0.5}{\sigma}\right)$ نجد :

$$\mathrm{P}(29 \leq \mathrm{X} \leq 32) \approx P\left(\frac{29-30-0.5}{5} \leq Z \leq \frac{32-30+0.5}{5}\right) = P(-0.3 \leq Z \leq 0.5)$$
$$= P(-0.3 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1179 + 0.1915 = 0.3094$$

2– حساب احتمال أن يظهر الرقم 6 من 31 إلى 35 مرة بما في ذلك 31 و 35 :

$$\mathrm{P}(31 \leq \mathrm{X} \leq 35) \approx P\left(\frac{31-30-0.5}{5} \leq Z \leq \frac{35-30+0.5}{5}\right) = P(0.1 \leq Z \leq 1.1)$$
$$= P(0 \leq Z \leq 1.1) - P(0 \leq Z \leq 0.1) = 0.3643 - 0.0398 = 0.3245$$

رابعا : تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي

بما أنه توجد علاقة تربط علاقة تربط توزيع بواسون بتوزيع ثنائي الحدين، وتوجد علاقة تربط توزيع ثنائي الحدين بالتوزيع الطبيعي فإنه من المنطقي أن نقول توجد علاقة تربط توزيع بواسون بالتوزيع الطبيعي، ويتحقق ذلك عندما تكون λ كبيرة أي : $\lambda \to \infty$ ويمكن التقريب وفق الصيغة التالية :

$$P(\lambda) \sim N(\lambda, \sqrt{\lambda})$$

$$\lambda \to \infty$$

والقاعدة العملية للتقارب هي عندما تتجاوز المعلمة λ للمقدار 15 أي $\lambda \geq 15$ فيما يعتمد بعض الاحصائيين كشرط للتقرب $\lambda \geq 10$.

ويكون التقريب وفق معامل التصحيح وحسب الحالات التالية :

$$P(X=x) \approx P\left(\frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(X<x) \approx P\left(Z < \frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$P(X \leq x) \approx P\left(Z < \frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

مثال 07 :

يستقبل مركز الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات الكبرى في المتوسط 16 حالة كل ساعتين، فما احتمال أن يستقبل بين الساعة العاشرة صباحا والثانية عشر صباحا :

1 - 10 حالات ؟

2- أقل من 11 حالة ؟

3- 11 حالة على الأكثر ؟

4- أكثر من 14 حالة ؟

5- أكثر من 5 حالات وأقل أو يساوي 17 حالة ؟

الحل :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع في الأصل توزيع بواسون، حيث: $\lambda = 16$ ، لكن حسب صيغة الأسئلة فإن استخدام هذا التوزيع يتطلب عمليات حسابية طويلة وصعبة، لذلك سيتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون، لأن شروط التقريب متوفرة، لأن $\lambda = 16 \geq 15$:، حيث يكون:

$$\mu = \sigma^2 = \lambda = 16$$

1- حساب احتمال استقبال 10 حالات :

$$P(X = 10) \approx P\left(\frac{x-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right) = P\left(\frac{10-16-0.5}{\sqrt{16}} \leq Z \leq \frac{10-16+0.5}{\sqrt{16}}\right)$$
$$= P(-1.625 \leq Z \leq -1.375) = P(-1.625 \leq Z \leq 0) - P(-1.375 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.4484 - 0.4162 = 0.0322$$

2- حساب احتمال استقبال أقل من 11 حالة :

$$P(X < 11) \approx P\left(Z < \frac{11-16-0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z < -1.375) = 0.5 - P(-1.375 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.5 - 0.4162 = 0.0838$$

3- حساب احتمال استقبال 11 حالة على الأكثر:

$$P(X \leq 11) \approx P\left(Z \leq \frac{11-16+0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z \leq -1.25) = 0.5 - P(-1.25 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

4- حساب احتمال استقبال أكثر من 14 حالة :

$$P(X > 14) \approx P\left(Z > \frac{14-16+0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(Z > -0.375) = 0.5 + P(-0.375 \leq Z \leq 0)$$
$$= 0.5 + 0.1480 = 0.6480$$

4- حساب احتمال استقبال أكثر من 5 حالات و أقل أو يساوي 17 حالة :

$$P(5 < X \leq 17) \approx P\left(\frac{5-16+0.5}{\sqrt{16}} < Z \leq \frac{17-16+0.5}{\sqrt{16}}\right) = P(-2.625 < Z \leq 0.375)$$
$$= P(-2.625 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.375) = 0.4957 + 0.1480 = 0.6437$$