CHAPITRE 1

Fonctions réelles d'une variable réelle

I. Généralités :

Ce chapitre est consacré à l'étude des fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans une partie A de $\mathbb{R}$.

$$f: D \to A$$
$$x \mapsto f(x)$$

1)- **Une fonction** f est définie par :

1- l'ensemble de départ D et l'ensemble d'arrivé A.

2- la valeur de f en x notée $f(x)$.

Le graphe de $f: D \to A$, est l'ensemble notée G_f des points du plan défini par

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}$$

Exemple1 $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ et g : $[0,1] \to \mathbb{R}$

$x \to x^2$ $\quad$ $x \to x^2$

elles sont différentes car les ensembles de départs sont différents.

* ***f* paire** $\Leftrightarrow \forall\, x \in D: f(-x) = f(x)$

$f(x) = \cos(x)$ est paire car on a

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x).$$

* ***f* impaire** $\Leftrightarrow \forall\, x \in D: f\,(-x) = -f(x)$

$g(x) = \sin(x)$ est impaire car on a $\sin(-x) = -\sin(x)$.

* ***f* périodique** $\Leftrightarrow \exists\, p \in \mathbb{R}^*: f(x + p) = f(x), \forall x \in D$

(la plus petite valeur positive de p est appelée la période de f)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$ on a : $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.

$p = 2\pi$ est la période de la fonction $\cos(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

* ***f* bornée** $\Leftrightarrow \exists a, A \in \mathbb{R}: a \leq f(x) \leq A,\ \forall x \in D$

Comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ alors la fonction $\cos(x)$

est bornée.

2)- L'ensemble de définition

L'ensemble de définition d'une fonction f, noté D_f,

est l'ensemble de départ

$$\{x \in \mathbb{R}: f(x)\ \ définie\}.$$

Exemple2 : $f(x) = \frac{1}{x}, D_f = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$

$$g(x) = \sqrt{x}, \quad D_g = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

3)- Composition de deux fonctions :

Soient les deux fonctions : $f : D_1 \to \mathbb{R}\ \ et\ g: D_2 \to \mathbb{R}$

$où\ g(D_2) \subset D_1$.

La fonction $f \circ g$ est définie par : $f \circ g : \ D_2 \to \mathbb{R}$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

on met $g(x)$ à la place de x dans $f(x)$.

Exemple3 : 1) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$ pour $f(x) = x^2 + 1$

et $g(x) = x - 1$

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = x^2 + 1 - 1 = x^2$$

Remarque.

a) En général $f \circ g \neq g \circ f$.
b) On a toujours $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

4)- Fonction identité : c'est la fonction

$$I_D: D \to D$$

$$x \to I_D\,(x) = x$$

II. Limite d'une fonction :

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$ (intervalle ouvert de $\mathbb{R}$). Supposons que f est définie sur $]a, b[$ ou bien sur $]a, b[\setminus\{x_0\}$. On parle de limite à gauche et à droite de x_0.

La limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 à gauche est notée

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) \quad ou\ bien \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

La limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 à droite est notée

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) \quad ou\ bien \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Si on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = l$$

Alors on dit que l est la limite de f au point x_0 et on la note

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Exemple7 . On a $\lim_{x \to 2}(3x + 2) = 8$

Exemple 8 .

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Ici $\frac{x^2-1}{x-1}$ $n'est\ pas\ définie\ en\ 1.$

Exemple9. On a

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$$

* **Les formes indéterminées (FI).**

$+\infty-\infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$	$0\cdot\infty$	$(1)^{\infty}$	$(0^+)^0$	$(+\infty)^0$

Exemple10.

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty-\infty \quad (FI)$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty(-\infty)=-\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=0^0 \quad (FI)$.

On a $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x^x)=\lim\limits_{x\to0^+}x\ln(x)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=e^0=1$.

Remarque : Pour les (FI) $(1)^{\infty}$, $(0^+)^0$ et $(+\infty)^0$ on calcule la limite du logarithme puis on revient par la fonction exponentielle.

III. Continuité :

Définition : f est dite continue au point x_0 si :

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}f(x)=f(x_0).$$

Si non elle est dite discontinue au point x_0.

Exemple11. La fonction $f(x)=x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0=2$ on a :

$$\lim_{x\to2}x^2=4$$

Pour $g(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & si \quad x\neq0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$ on a :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{x}=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}}\dfrac{-x}{x}=-1\neq1\end{cases}$$

Donc g est discontinue au point $x_0=0$.

Définition : on dit que f est continue sur $D_1\subset D_f$ si f est continue en chaque point de D_1.

Proposition : Soient f et g deux fonctions continues en un point $x_0\in D_f\cap D_g$. Alors :

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha f + \beta g \ est\ continue\ en\ x_0$

2) Le produit $f \cdot g\ est\ continue\ en\ x_0$

3) $si\ g(x_0) \neq 0$ alors : la fraction $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

4) $|f|$ est continue en x_0

Exemple12. *Les polynômes sont continus en tout point de $\mathbb{R}$.

*Les fractions rationnelles sont continues là où elles sont définies.

- **Théorème des valeurs intermédiaires :**
  Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et telle que :

$$f(a)f(b) \leq 0.$$

Alors il existe $c \in [a, b]\ tel\ que: f(c) = 0.$

Exemple13 : $f(x) = x^3 - 1$ dans l'intervalle $[0,2]$.

$$f(0) = -1 \qquad f(2) = 7 \quad f(0)f(2) \leq 0$$

Alors il existe $c \in [0,2]\ \ tel\ que: f(c) = 0.$

IV. Dérivation :

Définition : Soient une fonction $f: D_1 \to D_2$ et $x_0 \in D_1$. Alors f est dite :

1) dérivable à droite en x_0 , si elle est définie a droite de x_0 et

$$\lim_{\substack{> \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) \quad \in \mathbb{R}$$

Exemple14 : Calculez la dérivée à droite de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = |x|$.

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{x}{x} = 1.$$

2) dérivable à gauche de x_0 si elle est définie a gauche de x_0 et

$$\lim_{\substack{< \\ x \to x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \quad \in \mathbb{R}$$

Exemple15 : Calculez la dérivée à gauche de $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = |x|$.

$$f'_g(0) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \frac{-x}{x} = -1.$$

3) dérivable en $x_0 \in D_1$ si elle est définie en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0) \; existe$$

Remarque : En posant $x - x_0 = h$, la limite précédente peut être écrite sous la forme

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Pratiquement la dérivée mesure la perturbation de $f(x)$ quand la variable x est soumise à une petite perturbation notée ici h.

Exemple 16:

1) La dérivée en $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = |x|$ n'existe pas car $f'_d(x_0) = 1 \neq f'_g(x_0) = -1$.

2) La dérivée en $x_0 \in \mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = x^2$ est :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0.$$

Donc $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) Une fonction est dite dérivable sur un domaine D si elle est dérivable en tout point de D.

5) La droite d'équation

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

est **la tangente** à la courbe de f au point $\left(x_0, f(x_0)\right)$

et $f'(x_0) = tg(\theta)$ est **la pente** de cette tangente et θ est l'angle entre l'axe des abscisses (des x) et la droite tangente.

Propriétés. Soient $f, g: D \to \mathbb{R}$ dérivables sur D.

Alors on a dans D :

1- Linéarité : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $[\alpha f + \beta g]' = \alpha f' + \beta g'$

2- Dérivée du produit de deux fonctions :

$$[fg]' = f'g + fg'$$

3- Dérivée du rapport de deux fonctions :

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

4- Dérivée de la composée de deux fonctions :

$$[f(g(x))]' = g'(x)f'(g(x))$$

5- Puissance d'une fonction

$$\left[(f(x))^{g(x)}\right]' = [g(x)\ln(f(x))]'(f(x))^{g(x)}$$

Fonction	x^α	$\ln(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\mathrm{arctg}(x)$
Dérivée	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Fonction	u^α	$\ln(u)$	$\arcsin(u)$	$\arccos(u)$	$\mathrm{arctg}(u)$
Dérivée	$\alpha u' u^{\alpha-1}$	$\frac{u'}{u}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\frac{u'}{1+u^2}$

Définition. Les dérivées deuxième (ou seconde), troisième, quatrième , ... de $\boldsymbol{f(x)}$ sont notées par $\boldsymbol{f''(x), f'''(x), f''''(x)}$, ...

On note aussi la dérivée d'ordre $\boldsymbol{n}$ par $\boldsymbol{f^{(n)}(x)}$ **.**

On pose $\boldsymbol{f^{(0)}(x) = f(x)}$.

Théorème de Rolle

Soit $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant

- f continue sur $[a, b]$
- f dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

alors il existe au moins un point c de $]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

C'est-à-dire que f atteint en c **un extrémum local** (c’est-à-dire **maximum** ou **minimum local**) dans $[a, b]$.

Définition. On dit que f atteint en x_0 **un maximum local** s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que pour tout élément x de I, on ait $f(x) \leq f(x_0)$.

Définition. On dit que f atteint en x_0 **un minimum local** s'il existe un intervalle I contenant x_0 tel que pour tout élément x de I, on ait $f(x) \geq f(x_0)$.

Définition. On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.

Règle de l’Hôpital

Soient $f, g:]a, b[\to \mathbb{R}$ dérivables telles que g, g' ne s’annulent pas sur $]a, b[$. De plus on suppose que

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) \in \{0, \pm\infty\}$
- $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Alors

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Cette règle est applicable aussi pour les limites à gauche et à l’infini.

Exemple18 : calculez

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

Théorème de Rolle

Le théorème de Rolle fut démontré par Michel Rolle uniquement pour les fonctions polynomiales, la démonstration de la généralisation aux fonctions dérivables est due à Pierre-Ossian Bonnet.

Théorème 70 *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ tel que $f(a)=f(b)$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*

Le théorème de Rolle est intuitif, si la fonction à les mêmes images aux extrémités de l'intervalle $[a,b]$ alors elle admet soit un maximum soit un minimum ce qui correspond à l'existence d'un point dont la tangente est horizontal.

Théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est une conséquence du théorème de Rolle.

Théorème 71 *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{(b - a)} = f'(c).$$