Université de M'sila
Département de Physique
Contrôle Continu: Séries et équations différentielles(MATH3) **le : 08/01/2024**

Nom : **Prénom :** **Groupe :**

Exercice N°1 : on veut calculer le volume d'un solide qui s'élève sur le domaine D du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couverte par la paraboloïde $z = x^2 + y^2$

Solution :

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$$

On calcule d'abord les points d'intersections des courbes qui délimitent l'aire D :

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt) \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow\Rightarrow (2,4) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt) \end{cases}$$

le domaine D peut être écrit par :

$avec\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x), \}$.....................**(0.5pt)**

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=x^2}^{y=2x} \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14}{3} x^3 \right) dx = \left[\frac{-1}{21} x^7 - \frac{1}{5} x^5 + \frac{7}{6} x^4 \right]_0^2$$

$$= \frac{243}{630} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3pt)$$

Exercice N°2 Calculer le rayon de convergence R et la somme la série entière $\sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$. Etudier la série en $x = +R$ et en $x = -R$.

Solution :

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+1)(n+3)} \times \frac{(n+2)(n+4)}{1} \right) = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (0.5pt)$$

Donc le rayon de convergence de cette série est $R = 1$ (et l'intervalle de convergence est $x \in]-1, +1[$.

Alors il existe un intervalle $I \subset]-1, +1[$ telle que : ....**(0.5pt)**

$$\forall x \in I : \sum_{n\ge 0} \frac{1}{(n+1)(n+3)} x^n = S(x)$$

On peut écrire :

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+3)} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1pt)$$

Bonne Chance ***S.Bounab***

$$S(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)(n+3)}x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)}x^n-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+3)}x^n\right)$$

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(x^{-1}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+1)}x^{n+1}\right)-x^{-3}\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+3)}x^{n+3}\right)\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\,\mathbf{(1pt)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^{-1}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n\right)-x^{-3}\left(\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}x^n\right)\right)$$

Et on a :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x^n=-\ln|1-x|\quad\ldots\ldots\ldots.\,\mathbf{(0.5pt)}\quad et\ \sum_{n\geq 3}\frac{1}{n}x^n=-x-x^2-\ln|1-x|\ldots\ldots\ldots.\,\mathbf{(0.5pt)}$$

Alors on trouve

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(x^{-1}(-\ln|1-x|)-x^{-3}(-x-x^2-\ln|1-x|)\right)$$

$$\forall x\in I: S(x)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\ln|1-x|+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)\qquad x\neq 0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\,\mathbf{(1pt)}$$