Chapitre 3

Les Séries Numériques

1 Séries Numériques

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique, posons :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$

On définit ainsi une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à partir de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On appelle série la suite $(u_n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments dans* $\mathbb{R}^2$.

u_n *est nommé terme général de la série.*

S_n *est la somme partielle de rang* n.

On notera, en abrégé, la série $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou bien* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition 2.3.2 ***(Convergence, divergence d'une série).***

1. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est dite convergente si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles a une limite lorsque* $n \to +\infty$. *Dans ce cas, la limite* $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$ *est appelée somme de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$. *On écrira :*

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

2. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est dite divergente si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Deux séries sont dites de même nature si elles sont toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes.

Exemple 2.3.1 *La série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
La suite des sommes partielles S_n *est donnée par*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ *des sommes partielles est converge vers* 1. *Il en résulte donc que la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge. On écrira :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

2 Condition nécessaire de convergence d'une série

Proposition 2.3.1 . *Si la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Remarque 2.3.1 . *La réciproque de cette proposition est fausse.*

Proposition 2.3.2 .

1. La somme de deux séries convergentes est une série convergente.

2. La somme d'une série convergente et une série divergente est une série divergente.

3. Pour toute série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}^*$ *les séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ *sont de même nature.*

3 Série géométrique

Théorème 2.3.1 *Soit la série géométrique* $\sum_{n\geq 0} a^n$, $(a \in \mathbb{R})$. *Son terme général est* $u_n = a^n$.
La suite des sommes partielles de rang n *:*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k = 1 + a + a^2 + ... + a^n \\ &= \begin{cases} n+1, & si \;\; a = 1 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & si \;\; a \neq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

***1**$^{\text{ère}}$ **cas** $a=1$:* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. *Donc* $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ *diverge.*
***2**$^{\text{ème}}$ **cas** $|a|<1$:* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$. *Donc la série* $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ *converge et sa somme vaut* $S=\frac{1}{1-a}$.
***3**$^{\text{ème}}$ **cas** $|a|>1$:* $\lim\limits_{n\to+\infty} |a|^{n+1} = +\infty$, *d'où* $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *n'existe pas. Donc* $\sum\limits_{n\geq 0} a^n$ *diverge.*

4 Série harmonique

Définition 2.3.3 *La série* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ *est appelée série harmonique. On écrit souvent*

$$H_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}.$$

Théorème 2.3.2 *Sur la droite réelle* $\mathbb{R}$*, la série harmonique* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$*est divergente.*

5 Critères de convergence

Définition 2.4.1 *Une série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *réelle est dite à termes positifs si* $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq 0$.

Proposition 2.4.1 *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Pour que* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles associées* $(S_n)_{n\geq 0}$ *soit majorée (* $\exists M>0;\ S_n\leq M$*).*

Exemple 2.4.1 *La série* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$. *La suite des sommes partielles* S_n *est donnée par*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = 1-\frac{1}{n+1}\leq 1,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Donc $(S_n)_{n\geq 0}$ *est majorée par 1. Alors la série* $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente.*

Théorème 2.4.1 ***(comparaison avec une autre série. Inégalité).***
Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes positifs telles que*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq v_n$$

1. *Si* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *converge alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge alors* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *diverge.*

Exemple 2.4.2 *1. Soient* $u_n = \frac{\cos n}{n^2},\ v_n = \frac{1}{n^2}, (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = v_n)$.

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *est convergente (série de Riemann d'ordre 2). D'après le théorème de comparaison* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$ *est aussi convergente.*

2. Soient $u_n = \frac{1}{n},\ v_n = \frac{1}{\ln n}, (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n} = v_n)$.

$\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente (la série harmonique). D'après le théorème de comparaison* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln n}$ *est aussi divergente.*

Théorème 2.4.2 ***(théorème d'équivalence).***

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.*
Si $u_n \sim_{n\to+\infty} v_n$ $(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1)$*. Alors* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Exemple 2.4.3 *Soit* $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *est une série à termes positifs* $(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$.
Et on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} (\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1)$.
Nous avons vu que la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ *est divergente. D'après le théorème d'équivalence, on conclut que la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ *diverge aussi.*

Définition 2.4.2 ***(Série de Riemann).***

On appelle série de Riemann la série à termes positifs $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$*, où* α *est un réel donné.*

Théorème 2.4.3 *La série de Riemann* $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ *converge pour* $\alpha > 1$ *et diverge pour* $\alpha < 1$.

Proposition 2.4.2 ***(Règle de Riemann).***

Soit $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *une série réelle à termes positifs. Supposons qu'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$.

Alors la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *converge.*

Exemple 2.4.4 *Soit* $u_n = \frac{1}{n^2 \ln n}$, $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ *est une série à termes positifs (il existe* $\alpha = 2 > 1$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2 \ln n} = 0$*).*
D'après la proposition précédente, la série $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ *converge.*

Exemple 2.4.5 . *(Série de Bertrand)*

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*, la série de Bertrand* $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$ *ou* $(\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$*.*

Théorème 2.4.4 *(Critère de Cauchy).*

Soit $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. S'il existe* $l \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

Alors on a :

1. *Si* $l < 1$*, la série* $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *converge.*

2. *Si* $l > 1$*, la série* $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *diverge.*

Exemple 2.4.6 *Soit la série* $\sum\limits_{n \geq 1} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$, $u_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$$

$l = 2 > 1$. *Donc la série* $\sum\limits_{n \geq 1} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$ *diverge.*

Théorème 2.4.5 *(Critère de d'Alembert).*

Soit $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ *une série à termes strictement positifs telle que :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

1. *Si* $l < 1$*, la série* $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ *converge.*

2. *Si* $l > 1$*, la série* $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ *diverge.*

Exemple 2.4.7 *Soit la série* $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$, $u_n = \frac{1}{n!} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{(n+1)\, n!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$l = 0 < 1$ *Donc la série* $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ *converge.*