Chapitre 4

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

1 Définition et exemples

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n),\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}$.

$(x_1, x_2, ..., x_n)$ est dit n-uplet, en géométrie on dit un point de $\mathbb{R}^n$ il est vu aussi comme un vecteur.

Définition 1 *Une fonction numérique de n variables réelles est une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note*

$$\begin{array}{rcl} f : D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & f(x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Ou bien

$$\begin{array}{rcl} f : D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \quad \text{ou } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \end{array}$$

Exemple 1

1) $f(x, y) = x^3 + xy - y^2$, $D = \mathbb{R}^2$.

2) $g(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3) La fonction surface $= xy$, *volume* $= xyz$.

4) L'allométrie est l'étude des échelles de relations entre une partie du corps et le corps dans son ensemble. Une relation allométrique entre la masse (M) *et la longueur* (L) *du corps des poissons à la forme*

$$M = aL^b$$

4) La fonction résistance d'un montage en parallèle de deux résistances x *et* y *est donnée par*

$$\frac{xy}{x+y}$$

2 Fonction de deux variables

2.1 Domaine de définition

Le domaine de définition d'une fonction $f(x, y)$, noté D_f, est l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in \mathbb{R}\}.$$

En général, pour déterminer D_f on passe par les étapes suivantes :

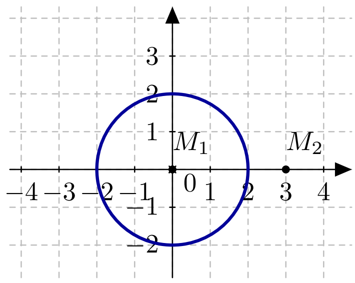
1) Ecriture du domaine.

2) Détermination des frontières.

3)Représentation graphique et détermination des régions qui constituent D_f en utilisant des points particuliers situés dans les régions.

Exemple 2

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$



1) $D_f = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4 - x^2 - y^2 \geq 0$.

2) Détermination des frontières :

$4 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2$, cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $r = 2$.

3) Le cercle divise le plan en deux régions, prenons deux points quelconques de ces deux régions. $M_1 = (0,0)$ et $M_2 = (3,0)$

Pour M_1 on a $4 - 0^2 - 0^2 \geq 0$

Pour M_2 on a $4 - 3^2 - 0^2 < 0$

Donc D_f = le cercle et son intérieur=le disque fermé.

2.2 Limite et continuité

1. **Limite en** $(0,0)$ **:**

Pour calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, la première étape consiste à remplacer x par 0 et y par 0, si on trouve un nombre ou ∞ c'est bon. Si on trouve une forme indéterminée alors il faut faire le changement de variable en coordonnées polaires suivant :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

θ contrôle la direction, et donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Ou bien poser $y = tx$, ici t contrôle la direction, et alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,tx).$$

• Si la limite ne dépend pas de θ (ou t) et est finie on dit qu'elle existe.

• Si elle dépend de θ (ou t) ou bien n'est pas finie on dit qu'elle n'existe pas.

Exemple 3

1)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2y+2}{x+y+3} = \frac{2}{3}.$$

2)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+2x^2y}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable en coordonnées polaires on trouve :

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^3+2(r\cos(\theta))^2(r\sin(\theta))}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\left(\cos^3(\theta)+2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right)}{r^2}$$

$$= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3(\theta)+2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\right) = 0.$$

3)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable en coordonnées polaires on trouve :

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos(\theta))^2+2(r\cos(\theta))(r\sin(\theta))}{(r\cos(\theta))^2+(r\sin(\theta))^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta)\right)}{r^2}$$

$$= \cos^2(\theta)+2\cos(\theta)\sin(\theta).$$

Cette limite dépend de θ, donc elle n'existe pas.

4)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable $y = tx$ on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(tx)}{\sqrt{x^2+(tx)^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{tx^2}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+t^2}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x^2}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

5)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} \quad (FI)$$

Par le changement de variable $y = tx$ on a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{tx^2}{x^2(1+t^2)} = \frac{t}{1+t^2}.$$

Cette limite dépend de t, donc elle n'existe pas.

2. **Limite en** (x_0, y_0) **:**
   On pose $X = x - x_0$ et $Y = y - y_0$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, Y + y_0).$$

Exemple 4

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x + y - 3}{x^2 + y - 3} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{(X+1) + (Y+2) - 3}{(X+1)^2 + (Y+2) - 3} = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{X + Y}{X^2 + 2X + Y}.$$

Maintenant par le changement $Y = tX$ *on obtient*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{X + tX}{X^2 + 2X + tX} = \lim_{X\to 0} \frac{1+t}{X + 2 + t} = \frac{1+t}{2+t}.$$

3. **Limite en** (x_0, ∞) **:**
   On pose $X = x - x_0$, $Y = 1/y$.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,\infty)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, 1/Y).$$

Exemple 5

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,+\infty)} y \ln\left(x + \frac{1}{y}\right) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\ln(X + 1 + Y)}{Y}.$$

En posant $Y = tX$ *on obtient*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(X + 1 + tX)}{tX} = \lim_{X\to 0} \frac{\ln(1 + (1+t)X)}{tX} = \frac{1+t}{t}.$$

4. **Limite en** (∞, ∞) :
   On pose :$X = 1/x$ et $Y = 1/y$.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(1/X, 1/Y).$$

Exemple 6

$$L = \lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} x \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \lim_{(X,Y)\to(0,0)} \frac{\sin(X+Y)}{X}.$$

En posant $Y = tX$ *on obtient*

$$L = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X + tX)}{X} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin((1+t)X)}{X} = 1 + t.$$

Continuité : f est continue en (x_0, y_0) si :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Exemple 7 *Etudier la continuité en* $(0,0)$ *de la fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a par le changement $y = tx$ *:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{tx}{1+t^2} = 0 = f(0,0).$$

Donc f *est continue en* $(0,0)$*.*

2.3 Dérivées partielles

On commence par donner la définition pour le cas général.

Définition 2 *La dérivée partielle de la fonction à* n *variables* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *par rapport à la variable* x_k *(où* $k = 1, ..., n$*), est la dérivée de la fonction*

$$x_k \mapsto f(x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$$

de la variable x_k*, en considérant toutes les autres variables* x_j *comme des constantes (ou paramètres) .*
Cette dérivée partielle de f *par rapport à* x_k *reste une fonction à* n *variables et elle est notée*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}$$

Exemple 8 *Les dérivées partielles de la fonction :*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 5x_2^3 + \ln(x_3x_4) + x_1x_2$$

sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 6x_1 + x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 15x_2^2 + x_1, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{1}{x_3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{1}{x_4}$$

Exemple 9 *Les dérivées partielles d'une fonction à trois variables $f(x, y, z)$ sont notées par :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pour $f(x, y, z) = xe^{2z} + \ln(xyz)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2z} + \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2xe^{2z} + \frac{1}{z}.$$

Exemple 10 *Pour la fonction à deux variables $g(x, y) = x^2+xy^2+3y^3+e^{xy}$ on a :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y^2 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 9y^2 + xe^{xy}.$$

Maintenant on donne la définition des dérivées partielles secondes pour une fonction à deux variables.

Définition 3 *Les dérivées partielles secondes de la fonction à deux variables $f(x, y)$ sont les dérivées partielles des fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. On énumère quatre :*

1) la dérivée partielle seconde par rapport à x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

2) la dérivée partielle seconde par rapport à y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

3) la dérivée partielle seconde par rapport à x et puis y notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

4) la dérivée partielle seconde par rapport à y et puis x notée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Exemple 11 *Pour la fonction $g(x, y) = x^2+xy^2+3y^3+e^{xy}$ de l'exemple 10 on a :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2+y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x+18y+x^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y+(xy+1)e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y+(xy+1)e^{xy}$$

Theorem 1 *Si en un point $(x,\ y)$ les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues, alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Définition 4 : Soit f une fonction définie sur un ouvert U et (x_0, y_0) un point de U.
• Si la fonction partielle $f_x : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0, on dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x en (x_0, y_0), et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

• De même, si l'application partielle $f_y : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0, on dit f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y en (x_0, y_0) et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Définition* 5 *: Une fonction f est de classe C^1 en (x_0, y_0) (resp. sur un ouvert U) si ses deux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en (x_0, y_0) (resp. sur U).

Exemple 1 : Soit $f(x,y) = x^2y + y^2 + 3x$ (f est une fonction polynôme en x et y, définie sur $\mathbb{R}^2$).
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 2y$.
Exemple 2 : Soit $f(x,y) = e^{x+y} + \ln(x-y)$. (Ici D_f est le demi-plan ouvert $\{(x,y)/x > y\}$).
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} + \dfrac{1}{x-y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x+y} - \dfrac{1}{x-y}$.

Définition* 6 *: Une fonction de classe C^1 sur un ouvert U admet des dérivées partielles d'ordre 2 en un point (x_0, y_0) de U (resp. sur U) si, et seulement si, ses deux dérivées partielles d'ordre 1 admettent elles-mêmes des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à x et à y en (x_0, y_0) (resp. sur U). On note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = f''_{x^2}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_o) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) = f''_{y^2}(x_0,y_0)$$