Chapitre 5

Mathématiques (L3) – Quelques exercices supplémentaires

INTÉGRALES DOUBLES

§ 1. — Intégrales doubles à variables séparables

Rappels de cours

Une intégrale double de la forme $\iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ peut se calculer en séparant les variables :

$$\iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

Exercice 1.1. Calculer $\displaystyle\iint_D e^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|\leq 1 \;\text{ et }\; y\in[0\,;1]\}$.

Corrigé de l'exercice 1.1. En utilisant la formule $e^{a+b} = e^a e^b$ et le fait que $|x|\leq 1 \iff -1\leq x\leq 1 \iff x\in[-1\,;1]$, on peut séparer les variables :

$$\iint_D e^{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[-1\,;1]\times[0\,;1]} e^x e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{-1}^1 e^x\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 e^{-y}\,\mathrm{d}y\right)$$
$$= [e^x]_{-1}^1 \times [-e^{-y}]_0^1 = (e-e^{-1})(1-e^{-1}) = \boxed{e-1-e^{-1}+e^{-2}}.$$

Exercice 1.2. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{|x-2|}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq 3 \;\text{ et }\; 1\leq y\leq e\}$.

Corrigé de l'exercice 1.2. On calcule l'intégrale en séparant les variables :

$$\iint_D \frac{|x-2|}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_0^3 |x-2|\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_1^e \frac{\mathrm{d}y}{y}\right).$$

La seconde intégrale se primitive directement ; pour la première, on enlève les valeurs absolues en remarquant que :

$$|x+2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2, \\ 2-x & \text{si } x \leq 2. \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{|x-2|}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \left(\int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_1^e \frac{\mathrm{d}y}{y}\right) \\
&= \left(\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3\right)(\ln|e| - \ln 1) \\
&= \left(4 - \frac{4}{2} + \frac{9}{2} - 6 - \frac{4}{2} + 4\right) \times 1 = 2 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

§ 2. — Intégrales doubles par intégrations successives

Exercice 2.1. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \ \text{ et } \ 0 \leq y \leq x\}$.

Corrigé de l'exercice 2.1. On calcule en faisant deux intégrations successives :

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,[\arctan(y)]_0^x\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Cette intégrale est du type $\int u'u$ où $u(x) = \arctan x$ donc se primitive en $\frac{1}{2}u^2$:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)} = \left[\frac{1}{2}(\arctan x)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \boxed{\frac{\pi^2}{32}}.$$

Exercice 2.2. Calculer $\displaystyle\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \ \text{ et } \ |x| \leq |y|\}$.

Corrigé de l'exercice 2.2. On va faire deux intégrations successives. Avant cela, simplifions la description domaine D. Puisque $0 \leq y \leq 1$, on a $|y| = y$ et donc $|x| \leq |y|$ s'écrit $|x| \leq y$ qui signifie à son tour $-y \leq x \leq y$ et donc $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \ \text{ et } \ -y \leq x \leq y\}$. On a donc :

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{-y}^{y} \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 [x]_{-y}^{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2y\,\mathrm{d}y = [y^2]_0^1 = \boxed{1}.$$

Exercice 2.3. (plus dur) Calculer $\iint_{[0\,;1]^2} |x-y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Corrigé de l'exercice 2.3. On va faire deux intégrations successives en écrivant

$$\iint_{[0\,;1]^2} |x-y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 |x-y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Lorsque y est fixé, on a :

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si } x \geq y, \\ y-x & \text{si } x \leq y, \end{cases}$$

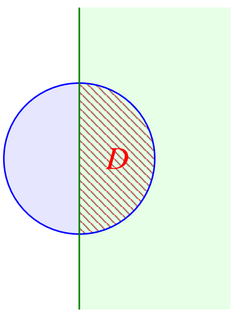
donc

$$\begin{aligned}
\iint_{[0\,;1]^2} |x-y| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left(\int_0^y (y-x)\,\mathrm{d}x + \int_y^1 (x-y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\left[yx - \frac{x^2}{2} \right]_0^y + \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_y^1 \right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(y^2 - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} - y - \frac{y^2}{2} + y^2 \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(y^2 - y + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{y}{2} = \boxed{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

§ 3. — Intégrales doubles par passage en coordonnées polaires

Exercice 3.1. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1 \text{ et } x \geq 0\}$.

Corrigé de l'exercice 3.1. On va passer en coordonnées polaires. Le domaine D est l'intersection du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 et du domaine à droite de l'axe Oy, c'est-à-dire que r est compris entre 0 et 1 et que θ varie entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$:

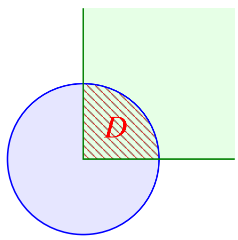


On a donc $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1 \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1 + x^2 + y^2} &= \iint_\Delta \frac{r\cos\theta}{1 + r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 \frac{r^2}{1 + r^2}\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \left(\int_0^1 \frac{r^2 + 1 - 1}{1 + r^2}\,\mathrm{d}r\right)[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \left(\int_0^1 1 - \frac{1}{1 + r^2}\,\mathrm{d}r\right) \times 2 \\
&= 2\,[r - \arctan r]_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{2 - \frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.2. Calculer $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$.

Corrigé de l'exercice 3.2. On va passer en coordonnées polaires. Le domaine D est l'intersection du disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 et du domaine à droite de l'axe Oy et en haut de l'axe Ox, c'est-à-dire que r est compris entre 0 et 1 et que θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:



On a donc $\Delta = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Par suite,

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta r\cos\theta r\sin\theta r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right).$$

La première intégrale se primitive directement tandis que la seconde est du type $\int u'u$ où $u(\theta) = \sin\theta$ donc se primitive en $\frac{1}{2}u^2$:

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \times \left[\frac{1}{2}(\sin\theta)^2\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

§ 4. — Exercices de synthèse

Exercice 4.1. Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ lorsque :

(i) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq 1\}$

(ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ et } -y \leq x \leq y\}$

(iii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 3 \text{ et } y \geq 0\}$

Corrigé de l'exercice 4.1. La présence du $x^2 + y^2$ peut faire penser à passer en coordonnées polaires, mais il faut faire attention que pour cela, il faut aussi que le domaine se décrive simplement en terme de r et θ.

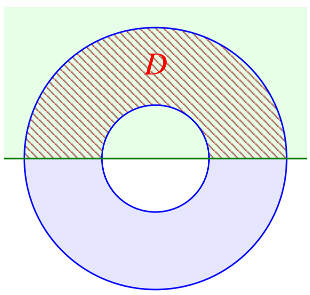
(i) Ici, le domaine est un carré, donc n'admet pas de description simple en terme de r et θ. On ne va donc pas passer en coordonnées polaires, mais utiliser une autre méthode. Il est possible de séparer les variables :

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \mathrm{d}y\right) + \left(\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} [y]_0^1 + [x]_{-1}^{0}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}.\end{aligned}$$

(ii) Là aussi, le domaine ne se décrit pas simplement en fonction de r et de θ, donc on ne passe pas en coordonnées polaires. Vu la forme du domaine, on va faire deux intégrations successives :

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 \left(\int_{-y}^{y} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{-y}^{y}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \left(\frac{y^3}{3}+y^3-\frac{(-y)^3}{3}-y^2(-y)\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{8}{3}\int_0^2 y^3\,\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8}{3}\frac{2^4}{4} = \frac{8}{3}\frac{16}{4} = \boxed{\frac{32}{3}}.\end{aligned}$$

(iii) Cette fois-ci le domaine se décrit simplement en fonction de r et θ, donc on va passer en coordonnées polaires. Traçons le domaine D :



Le cercle intérieur a pour rayon $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et le cercle extérieur pour rayon $\sqrt{3}$. Le domaine Δ correspondant est donc $\{(r,\theta) \mid r \in [\frac{1}{\sqrt{2}}\,;\sqrt{3}] \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]\}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Delta r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \iint_\Delta r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} r^3\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\right) \\ &= \left[\frac{r^4}{4}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \times [\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{4}\left((\sqrt{3})^4 - \frac{1}{(\sqrt{2})^4}\right)\times\pi \\ &= \frac{\pi}{4}\left(9-\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{35\pi}{16}}\end{aligned}$$