Université Mohamed BOUDIAF de M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de l'informatique

Année universitaire 2023/2024
2ème Année Licence Informatique
Module : Méthodes numériques

Corrigé type de l'examen

Exercice 1 : (7 points)

1. **La forme matricielle AX=b.** (1 points)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}}_{b}$$

2. **La résolution du système (S) par la méthode de Gauss.** (4 points)

Etape 1 : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{array}$; Etape 2 : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & -3 & 7 & -16 & -25 \\ 0 & 1 & 8 & -10 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$

Etape 3 : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{array}\right) L_4 \leftarrow L_4 + \frac{15}{14} L_3$; On obtient : $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_3 + 7x_4 = 11 \\ -x_2 + 7x_3 - 10x_4 = -13 \\ -14x_3 + 14x_4 = 14 \\ -5x_4 = -10 \end{cases} \quad \text{Donc la solution de (S) est: } \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

3. **La décomposition de la matrice A, (A=LU).** *(1 points)*

La matrice $U = \hat{A}$ obtenue dans (Q2), alors,

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \text{ et } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -15/14 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Le déterminant de la matrice A.** *(1 points)*

$$\det(A) = \det(L)\det(U) = 1(1)(-1)(-14)(-5) = -70.$$

Exercice 2 : (6 points)

1. **Vérification que les processus itératifs de Jacobi et Gauss-Seidel convergent, quelque soit le vecteur initial $\boldsymbol{X^{(0)}} \in \mathbb{R}^3$.** (1 points)

On a : $\begin{cases} |0{,}6| > |0{,}2| + |-0{,}1| \\ |0{,}4| > |0{,}1| + |0{,}1| \\ |0{,}5| > |-0{,}2| + |0{,}1| \end{cases}$. Donc la matrice A est à diagonale strictement dominante par ligne. Alors, les processus itératifs de Gauss-Seidel associés au système linéaire **AX=b** convergent, quelque soit le vecteur initial $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

2. **les processus itératifs de Gauss-Seidel associés au système linéaire AX=b:** (1 points)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(0{,}7 - 0{,}2x_2^{(k)} + 0{,}1x_3^{(k)}\right)/0{,}6 \\ x_2^{(k+1)} = \left(1{,}2 - 0{,}1x_1^{(k+1)} - 0{,}1x_3^{(k)}\right)/0{,}4 \\ x_3^{(k+1)} = \left(1{,}5 + 0{,}2x_1^{(k+1)} - 0{,}1x_2^{(k+1)}\right)/0{,}5 \end{cases}$$

3. **Les quatre (4) premiers itérés de la méthode de Gauss-Seidel :** (4 points)

K	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
x_1	*0.9*	**1.0167**	**0.9935**	**0.9992**	**0.9996**
x_2	*1.9*	**2.0208**	**2.0010**	**2.0009**	**2.0002**
X_3	*2.9*	**3.0025**	**2.9972**	**2.9995**	**2.9998**
L'erreur		**0.1208**	**0.0232**	**0.0057**	**0.0007**

Exercice 3 : (7 points)

1. **L'algorithme qui permet de résoudre un système linéaire par la méthode de Gauss.** *(4 points)*

Algorithme SL_Methode_Gauss

Variables :

A : Tableau(N×N) des réels

X,b : Tableaux(N×1) des réels

N,k,i,j : Entiers

S,α : Réels

Début

```
Ecrire ('Entrer la matrice A, et le vecteur b')
Lire (A, b)
Pour k=1 jusqu'à N-1 (pas +1) faire
        Pour i=k+1 jusqu'à N (pas +1) faire
                α ← A(i,k)/A(k,k)
                b(i) ← b(i)-α*b(k)
                Pour j=k+1 jusqu'à N (pas +1) faire
                        A(i,j) ← A(i,j)-α*A(k,j)
                Fin pour(j)
        Fin pour(i)
Fin pour(k)
X(N) ← b(N)/A(N,N)
Pour i=N-1 jusqu'à 1 (pas -1) faire
        S ← 0
        Pour j=i+1 jusqu'à N (pas +1) faire
                S ← S+A(i,j)*X(j)
        Fin pour(j)
        X(i) ← (b(i)-S)/A(i,i)
Fin pour(i)
Ecrire ('La solution est X= ', X)
```

Fin

2. **Calcul du nombre d'opérations arithmétiques (Calcul de complexité arithmétique).** *(3 points)*

....